LÒGICA, LLENGUATGE I MATEMÀTICA.

Prolegòmens d'una recerca filosòfica.

per F. GRAELL I DENIEL

ÍNDEX

PART SEGONA

Esbossos per a les disciplines matemàtiques elementals

PRÒLEG

El treball que el lector té a les mans pretén de contribuir, certament d'una manera modesta, a la renovació necessària del pensament filosòfic a finals del segle XX: si més no hi ha l'esforç d'un «canvi d'aires» sense recaure, o aquesta ha estat la intenció, en solucions fàcils o en discursos que no ha pres prou precaucions delimitadores. No sabem l'acolliment que podrà tenir una obra d'aquest tipus en els medis filosòfics del nostre país, de vegades poc inclinats, sembla, a exposar per escrit i d'una manera consistent les pròpies opcions metodològiques i la corresponent obra filosòfica; però tenim motius per a creure que aquest estat de coses està canviant, i canviarà encara més, i per tant que el present escrit serà rebut per molt amb curiositat, si no amb satisfacció.

Però tota novetat té els seus riscos: la nostra pròpia experiència ens ha il.lustrat que allò que havíem establert amb certesa passava a la categoria de les coses problemàtiques, quan no hi trobàvem a més a més greus confusions o usos excessivament expressius del llenguatge; per tant seríem els primers a acollir la crítica del nostre llibre, esperonats amb la dèria de fer millor els nostres afers, d'evitar confusions, de no fer mers jocs lingüístics, d'encetar noves radicalitats, de no parlar per parlar, etc. Car som conscients que un dels enemics més grans que té la filosofia no és pas un altre pensament, sinó la instal.lació en un llenguatge i en un estil reflexiu, que representa un final de camí, el fet d'anar abandonant ja la filosofia.

L'obra conté en efecte l'única preocupació de justificar un exercici racional i per això s'ocupa de la lògica, del llenguatge i de la matemàtica, perquè ens ha semblat que calia presentar alguns temes ben clàssics de la filosofia (la unitat, l'espai euclidià, etc.) al costat dels típics estudis sobre l'abast i el sentit d'alguns dels nostres mots, a banda dels usos plurals del llenguatge, i perquè el caràcter formal i lingüístic de prou avenços matemàtics (per no introduir ara afers físics) era una qüestió que feia suspectes d'altres aproximacions. Ara bé: el nostre treball és, com diem, una presentació, i de cap de les maneres no conclou les investigacions a fer; la matemàtica que el lector ha de conèixer es redueix a saber les operacions elementals d'aritmètica i els rudiments de geometria, un clar exponent que quasi tot resta per fer, malgrat que tenim també l'esperança que hem reeixit a comunicar el nostre específic missatge.

Però no voldríem acabar aquesta presentació sense agrair la comprensió i els ànims que hem rebut al llarg dels diferents redactats de l'escrit, així com les crítiques que ha suscitat alguna de les seves primeres versions i que han contribuït a deixar més explícitament clar els seus objectius. D'altra banda ens plau també de recordar, i d'agrair, el suport que l'obra ha merescut per part de la Fundació Jaume Bofill, i en especial l'afabilitat i la disponibilitat del seu director, el senyor Jordi Porta.

INTRODUCCIÓ

aquelles

És simptomàtic que tant les escoles analítiques com les fenomenològiques hagin tingut un origen en els problemes relacionats amb les nocions de nombre i, en conjunt, amb afers matemàtics. Sens dubte per cap d'~~elles~~ no eren les úniques preocupacions, alhora que els primers han anat ampliant el seu interès en la direcció dels llenguatges quotidians, mentre que els segons han continuat la recerca dels pressupòsits en la constitució del món i de les coses. Cal reconèixer que sovint hi ha hagut una certa incomunicació entre analítics i fenomenòlegs, segurament per uns motius similars als que explicarien l'allunyament entre Frege i Husserl. Tanmateix la resultant per a l'estudiós de finals del segle XX és la següent: considerant que la filosofia enclou una activitat crítica, per tant no dogmàtica en l'accepció de no acceptar allò ja estabert, no hi ha discurs possible sense una prevenció contra els usos no circumscrits del llenguatge ni sense una consideració d'un punt primer d'arrencada. Segurament el mer record d'una colla d'escoles analítiques o de corrents fenomenològics pot descoratjar el lector de qualsevol progrés sobretot en afegir que l'encreuament dels problemes lingüístics, de les concepcions lògiques, dels avatars de les geometries no euclidianes i de la progressiva abstracció en les disciplines matemàtiques, dels escorcollaments constitucionals de la donació del món, on caldria superposar la crisi dels models clàssics de la física, etc., semblen fer l'assaig radicalment irrealitzable.

Tanmateix la possibilitat que el desconeixement de les tradicions matemàtiques, lògiques, analítiques i fenomenològiques -- bandejant provisionalment els problemes que es deriven dels canvis substancials de perspectiva en la física del segle XX -- ens incapacitaria efectivament d'una presa de consciència de l'estat de la qüestió, no lleva que tenim alguns fets que semblen indicar que un bon nombre de les dificultats no són de principis sinó de conseqüències, i que l'esperança d'algun fil conductor que ens guiï en l'embrolla no es trobi tant en una confrontació o en un acarament de posicions des de diferents punts, sinó a recular en la presentació de les qüestions i agafar de bell nou les disciplines matemàtiques en tota llur gerdor. De primer antuvi pot semblar una paradoxa que sigui sols a través de les lliçons que hem extret al llarg de l'últim segle que hàgim de tornar als començaments com si res no estigués dit, però segurament hem d'agrair als nostres avantpassats i al seu ingent treball d'esclariment el que nosaltres no repetim les mateixes passes. Il.lustrem-ho amb algun cas: el lector no ignorarà la importància que tingué per a l'afermament de les posicions lògiques l'intent de superació d'allò que anomenaren el 'psicologisme' (o 'subjectivisme', en algun ús del terme) dels continguts lògics o fins i tot dels contiguts de la ciència[1], però alhora respectant pel cap baix l'existència d'uns nivells bàsics de consciència independents dels nivells lògics, quan no s'intenta, com en les Ideen husserlianes, fonamentar l'autonomia del propi discurs psicològic. Sens dubte els límits del psicologisme i les pretensions de la ciència donades les bases amb què treballa l'individu constituïren -- i poden constituir -- uns temes apassionants en la mesura que semblen comprometre la possibilitat de fer un estudi objectiu (contra el subjectivisme) i vàlid amb generalització (contra el relativisme), però caldria segurament afegir que els nivells bàsics (introspectius) del coneixement per part d'un individu no han semblat sempre dades autònomes o que hi pugui haver una tal anàlisi que pugui distingir nivells en un mateix acte de consciència[2], i més aviat poden semblar resultants dels estudis (i del coneixement). Acceptem per uns instant que no hi hagi possibilitat de diferenciar en una mateixa conducta i en tant que tal el contingut lògic del psicològic (introspectiu): el replantejament de la lògica hauria de tirar enrera per tal de redefinir-se, però això sols hauria estat possible gràcies a l'evolució interna dels propis corrents de pensament.

---

[1]cf. entre molts Frege Grundgesetze der Arithmetik, pàgs. XIIIss (més de la meitat del pròleg); Husserl Logische Untersuchungen (entre d'altres parts tots els prolegomena); el Carnap del temps de Der logische Aufbau der Welt (en especial pàgs.20-21), etc.

[2]Caldria esmentar sobretot tota l'obra de M.Merleau-Ponty, en especial els seus treballs La structure du comportement (1942) i la Phénoménologie de la perception (1945) com un bell exemple de combat intel.lectual contra l'apriorisme empirista o racionalista. Si més no també pel que fa a la crítica psicologista (introspectiva) l'obra de Sartre té la mateixa resultant (cf.per exemple L'Être et le néant, pàgs.362-363).

Prenguem un altre punt a l'atzar: quan els corrents analítics i fenomenològics s'han ocupat del llenguatge ha estat precisament perquè els coneixements i llur transmissió es fan de manera cabdal (i privilegiada) a través d'aquell mitjà, i en conjunt la pul.lulació de treballs ha fomentat decididament la crítica lingüística; certament ara no es tracta tant d'avaluar-lo com la casa de l'ésser o d'exigir-hi un esquema lògic preconcebut, sinó de prendre una tal posició que sigui, si més no en els començaments, la dels mínims en l'accepció que el llenguatge amagui tants pocs misteris com sigui possible a fi de deixar lliure l'espai dels seus plurals usos. Això demana, és cert, que un hom esmerci circumspectament els mots, sense prejudici però també sense gosadies; és clar que la crítica lingüística es converteix ràpidament en una crítica epistemològica, perquè és impossible un estudi sobre el llenguatge des del llenguatge entès com un reguitzell de sons. I si tenim motius per creure que els avenços substantius en aquesta direcció fets pels corrents analítics han estat un pèl inconseqüents en algun extrem[3], ahora és possible de trobar en alguns fenomenòlegs un cert abús de les capacitats discriminadores de l'home. Al capdavall la resultant és l'exigència d'una crítica radical epistemològica i lingüística, que ens deixa, en alguna accepció, enmig d'una terra verge no sotjada, perquè, certament, la història lingüística i epistemològica de les escoles analítiques i fenomenològiques serveixen ben bé de prevenció, però no sempre d'indicació.

* * *

---

[3] Aquesta inconseqüència està reconeguda exemplarment en alguns moment de la llarga carrera analítica, per exemple en Wittgenstein <u>Tractatus</u> 6.53, 6.54, 7; les paraules d'aquest mestre contrasten vivament, per exemple, amb les de l'Ayer de 1935: «<u>les proposicions de la filosofia no són fàctiques, sinó de caràcter lingüístic; vull dir, que no descriuen la conducta dels objectes físics, ni àdhuc dels objectes mentals. Les proposicions filosòfiques expressen definicions, o les conseqüències formals de les definicions. D'acord amb això, podem dir que la filosofia és un departament de la lògica; car, com veurem, la marca característica d'una recerca purament lògica és que tracta de les conseqüències formals de les nostres definicions, i no de les qüestions de fets empírics</u>» (<u>LLenguatge, veritat i lògica</u>, pàg.82); però els corrents terapèutics, el grup d'Oxford i fins i tot les mateixes <u>Investigacions filosòfiques</u> no semblen haver acabat d'esgotar el punt de mira que, amb la crítica dels usos del llenguatge, caldria potser accentuar més la pròpia possibilitat d'aquesta crítica i possiblement podria suposar-se que hi ha hagut en algun autor un excés d'enginy.

Les relacions entre la lògica simbòlica i les disciplines matemàtiques han estat prou intenses en les deu o quinze dècades anteriors, per més que no s'ofereixen de cop i volta i que sols mitjançant un consiròs estudi sembla possible de circumscriure-les una mica; si la lògica, per exemple, explicita les regles d'inferència que d'alguna manera són vigents també en la demostració matemàtica, sembla que ens trobem davant d'una reduplicació, que arribaria, a intregrar les disciplines matemàtiques si fossin descabdellaments lògico-formals: en el primer cas hi hauria el problema de legitimar la diferència substantiva entre la regla lògica i la demostració matemàtica sense recaure en l'idealisme, mentre que el segon trobaria, sembla, problemes de circumscripció significativa.

Es podria pensar en aquest sentit que les successives crisis de la logicització de l'aritmètica, per exemple, semblen indicar que l'estudi dels elements propis de la matemàtica es descabdella d'una manera independent de certes concepcions lògiques -- i segurament fora una direcció esclaridora~~s~~. El llenguatge simbòlic, tot i això, es remunta fins a Aristòtil: es tracta doncs de l'abast d'un tal llenguatge; sembla que no n'hi ha prou a acceptar una qualsevol concepció del llenguatge formal com un estri heurístic, sinó que caldria així mateix prendre algunes precaucions, perquè fins i tot circumscrivint la lògica tradicional a l'estudi de les inferències no sembla segur que n'hi pugui haver fora dels diversos i contraposats temes. Al cap i a la fi es tracta -- com el lector entreveu -- del problema de la generalització[a]. Alhora l'afer introdueix la qüestió de la igualtat o de la identitat (i de la diferència) que no hauria de ser resolta al marge d'una positivitat lògica.

Sigui com sigui entre els teòrics de la lògica destaca la figura de Frege tant per l'aportació en el descabdellament de la lògica simbòlica contemporània com per la riquesa de matisos i d'apreciacions: caldrà recordar per exemple que pocs estudiosos han accentuat tant com Frege que la lògica matemàtica no és la lògica de formes ni de signes; prou lògics posteriors no l'han seguit quan interpreta la veritat com una significació (Bedeutung), però podem suposar que és precisament el criteri de veritat d'una proposició o d'un enunciat el que impedeix a alguns lògics de recaure en un mer discurs lingüístic, fins i tot admetent que la lògica té com a base enunciats, i no pas proposicions[b]. El lector suposarà que el criteri de veritat és aquí del tot rellevant perquè, l'admeti com a significació d'una proposició o com el moment gràcies al qual la lògica ~~té~~ una referència al món no lingüístic (o qualsevol altra que sigui la interpretació del mot 'veritat'), sembla que tracti

palesa

[a]cf.per exemple Principia mathematica I, pàg.93.

[b]cf.per exemple Quine a Philosophy of logic, pàg.97.

sols

quelcom pel qual els usos del llenguatge no se circumscriuen al propi llenguatge.

La noció de veritat pel cap baix ha de ser doncs estudiada amb un cert detall. En aquest punt tindria tota la raó Tarski en la cloenda del seu incisiu treball El concepte de veritat en els llenguatge formalitzats, quan advertia que «els filòsofs que no estan acostumats a l'ús de mèdodes deductius en llur treball de cada dia tendeixen a mirar tots els llenguatge formalitzats amb un cert menyspreu, perquè contrasten aquestes construccions 'artificials' amb l'únic llenguatge natural —— el llenguantge col.loquial. Per aquesta raó el fet que els resultats obtinguts concerneixin quasi d'una manera exclusiva els llenguates formalitzats reduirà considerablement, als ulls de molts lectors, el valor de les investigacions precedents. Em seria difícil de compartir aquest punt de vista. En la meva opinió les consideracions del paràgraf 1 [que estudia la veritat en el llenguatge natural] proven amb èmfasi que el concepte de veritat (així com d'altres conceptes semàntics) mena inevitablement a confusions i a contradiccions quan l'apliquem, juntament amb les lleis normals de la lògica, al llenguatge col.loquial. Qualsevol que desitgi de seguir, malgrat totes les dificultats, la semàntica del llenguatge col.loquial amb l'ajut dels mètodes exactes veurà primerament que li cal emprendre la tasca ingrata d'una reforma d'aquest llenguatge. Ho trobarà necessari per tal de definir-ne l'estructura, de superar l'ambigüitat dels termes que hi ocorren, i de trossejar finalment el llenguate en unes sèries de llenguatges d'abast més i més gran, cadacun dels quals està en la mateixa relació respecte del següent que un llenguatge formalitzat està respecte del seu metallenguatge. Es podria dubtar, tanmateix, que el llenguatge de la vida diària presevés encara la seva naturalitat després de ser 'racionalitzat' així, i que no adoptés més aviat els trets característics dels llenguatges formalitzats»: tindria tota la raó si el concepte de veritat sols es pot definir dins d'un llenguatge formalitzat i si certes concepcions de les lleis generals de la lògica simbòlica tenen un àmbit d'aplicació en els llenguatges quotidians i de la ciència.

* * *

La constitució de les geometries no euclidianes ha estat possiblement un factor que ha contribuït de manera eficaç a qüestionar que els possibles principis a partir dels quals comprendre un qualsevol descabdellament geomètric els puguem abastar tenint sols en compte la quotidiana concepció de l'espai. L'argumentació seria si fa no fa la següent: donat que un nombre d'axiomes permeten de descabdellar un sistema consistent (i.e. sense contradicció) geomètric d'espais no euclidians, i que l'espai quotidià està aproximadament d'acord amb el model dels Elements, llavors els principis de geometria i el sistema consistent que en brolla no es funden en els espais quotidians i el mateix model dels Elements no cal que vingui justificat a través de l'experiència, sinó que s'accepta la seva consistència a partir del descabdellament lògic des de principis. Com William i Martha Kneale diuen en el seu excel.lent llibre «quan s'ha deixat en clar això, es pot veure que el descabdellament de la geometria no-euclidiana no refuta, com han suposat alguns filòsofs, l'antic punt de vista d'Euclides i de Kant, segons el qual el postulat de les paral.leles és una veritat necessària de l'espai perceptiu. Perquè es pot argüir pel cap baix que les condicions lògiques prescrites pels axiomes de la geometria euclidiana es manllleven necesàriament de les relacions de congruència perceptibles. Però si de fet ho fan, allò que estableixen no és una veritat de la lògica formal, ni una veritat de la geometria en el sentit que els matemàtics purs usen ara el mot 'geometria'. Per a les finalitat de la matemàtica n'hi ha prou que les condicions prescrites pels axiomes de la geometria no-euclidiana siguin consistents, això és que no duguin a contradiccions, i el procediment per mitjà de representacions o de projeccions ha mostrat que no hi pot haver inconsistència en els axiomes tant de la geometria el.líptica com de la hiperbòlica a no ser que hi hagi també inconsistència en els axiomes de la geometria euclidiana... Però no és de cap manera obvi que l'espai físic sigui euclidià en el sentit de satisfer tots els axiomes d'Euclides. Difícilment podem mantenir, per exemple, que percebem tant una infinitat externa de punts enllà de qualsevol punt i que mai no s'acaba, com una infinitat interna de punts entre punts i que mai no s'acaba; i si malgrat tot diem que l'espai físic és euclidià en ple sentit, caldria que defenséssim que coneixem això com una veritat necessària donada en una intuïció espacial»[6].

Si més no la revisió dels axiomes i l'accent en la consistència lògica, incità per una banda la formulació explícita de tots els pressupòsits de la geometria euclidiana, en la línia dels Grundlagen der Geometrie (1899) de Hilbert, al costat del

---

[6]The development of logic, pàgs.385-387.

descabdellament i la presentació de les diverses geometries. D'altra, com esmentàvem, convidava una vegada més els lògics a desenvolupar les nocions d'axiomatització[7]. Tanmateix, sense abandonar el terreny de la geometria, segurament no és insensat d'admetre que la mateixa pluralitat d'espais -- l'hiperbòlic, els espais projectius, els espais *n*-dimensionals, àdhuc d'infinites dimensions, els espais riemannians, topològic, i d'altres -- ens posen a l'aguait tant d'una fàçil simplificació com de fer menyscapte dels pressupòsits històrics a partir dels quals es descabdellen. Però això ens duu si més no com a passa prèvia a un esclariment de la pròpia geometria euclidiana, en especial a una avaluació dels principis, del propi mètode demostratatiu i del mateix espai euclidà; encara més, perquè no es tracta sols de saber d'una manera directa les relacions entre l'espai quotidià i l'euclidià, ni la d'aquest amb els nous espais com si tot el que hi anéssim anotant fos mera descripció (o deducció) a partir dels axiomes geomètrics establerts, quan poques disciplines matemàtiques no fan referència o es basen immediatament o mediata en consideracions numèriques i quan prou geometries usen aquestes disciplines com a quelcom sabut, mentre paren compte del seu punt de partida. En d'altres paraules, no n'hi ha prou a estudiar la geometria euclidiana com a precedent, sinó que cal reflexionar sobre el conjunt de les branques matemàtiques i precisament com a precedents històrics.

Tot això pot ser vàlid fins i tot a nivell de les concepcions no-euclidianes del propi Gauss (fetes públiques per primer cop el 1862 en publicar-se el seu intercanvi epistolar amb Schumacher), de l'obra *Sobre els rudiments de la geometria* (1829-1830) de Lobatxevski o de l'*Appendix* (1832) de Bolyai, però ho és més i més a mesura que entrem en noves geometries abstractes. La mateixa geometria *n*-dimensional neix primerament com una generalització de la geometria analítica usual a un nombre arbitrari de variables: Lagrange ja usà el temps com a quarta coordenada en els seus estudis de mecànica, però els primers treballs sistemàtics són del 1844 i es deuen d'una manera independent a Grassmann i a Cayley[8]. Alhora és prou sabut que el genial edifici del la geometria de Riemann, expressat per primera vegada en la conferència *Sobre les*

---

[7]Per a la versió de Frege, pel qui l'aritmètica formava part de la lògica (era sols «*weiter entwickelte Logik*»), cf.*Grundgesetze der Arithmetik* I, pròleg vi.

[8]Aquest origen analític no lleva l'assaig d'investigacions merament geomètiques fetes posteriorment, per exemple pel matemàtic suís Schläefi el 1852 sobre els poliedres en un espai *n*-dimensional, continuat en especial pels matemàtics russos, sobretot per C.F.Voronoi (1868-1908). Val la pena de recordar que els espais topològics i els projectius també poden tenir les respectives geometries *n*-dimensionals.

hipòtesis en les quals es basa la geometria l'any 1854, i descabdellat més tard amb un prodigiós aparell formal, pren cos precisament a partir de fórmules funcionals, a banda del fet que arribem aquí a una noció d'«espai» de cap a cap generalitzada. O que l'Erlanger Programm (1872) de Klein recull els resultats de l'estudi de la geometria projectiva, de l'afí, i d'altres, per tal d'establir el principi general de la seva formació: que podem considerar un grup arbitrari de transformacions unívoques de l'espai i estudiar les propietats de les figures que es conserven en les transformacions, etc. En aquesta orientació podria semblar que acceptem sols una nova branca de la matemàtica perquè hem acceptat abans aquella de la qual en depèn, i que dominem: l'ascendència històrica duria a una de conceptual, la comprensió d'una geometria no-euclidiana passaria per la comprensió de l'euclidiana talment com és probable que acceptem una generalització numèrica o la mateixa àlgebra perquè acceptem d'aritmètica, i passaria per la comprensió del domini dels estris matemàtics que hi han dut[7].

D'altra banda es té la sensació que de vegades hem abusat de les nostres capacitats intel.lectuals quan hem infravalorat que l'axiomatització és d'alguna manera a considerar una cloenda de camí; la utilitat dels nostres sistemes geomètrics deductius i la seva certesa de fet segurament ens ha inclinat a vorejar les consideracions de dret.

*   *   *

Cap de les geometries existents es descabdella independentment del nombre: el propi espai euclidià és subjecte d'una exploració numerica exhaustiva, i d'alguna manera el coneixement del nombre, de l'aritmètica, i de les seves generalitzacions és coextensiu al

---

[7]En aquest sentit potser tingui algun interès de veure de manera puntual la qüestió d'assegurar la no-contradicció en les geometries no-euclidianes; en efecte una conseqüència de la representació de la geometria no-euclidiana dins de la d'Euclides rau a considerar-la tan poc contradictòria com la d'Euclides, això és, ho seria, si ho fos aquesta darrera; és prou sabut que la primera interpretació es degué al geòmetre italià Beltrami l'any 1868, però la més coneguda és sens dubte la de F.Klein a Ueber die sogennate nicht-euklidische Geometrie (1871) (Poincaré elaborà un tercer model, que li va servir per a resoldre problemes d'una branca matemàtica del tot allunyada: la de la teoria de les funcions de variable complexa). A propòsit de la no-contradicció de les geometries a partir de la no contradicció dels nombres naturals, cf.H.Reichart, Gauss und die Anfängen der nicht-euklidischen Geometrie, pàg.114.

desenvolupament d'una geometria, i d'aquí la seva importància. Però de bell nou les relacions entre l'aritmètica, per exemple, i la geometria queden ofuscades per la naturalesa de les nocions del nombre i la de les pròpies entitats geomètriques, mentre que la singularització de la unitat enmig de tots aquests afers és, en certa mesura, urgent, quan no és possible per exemple de formular l'axioma de les paral.leles sense la unitat. És clar que per a descabdellar una aritmètica no calen les subtileses a l'entorn de la natura de la unitat: el desig de circumscriure-la prové més aviat d'una urgència de racionalitat, que els aprenentatges supleixen, i del fet que la consistència lògica entre la seva noció i la pràctica aritmètica sembla enfortir el criteri emprès en conjunt. A més l'aritmètica (i la geometria) han estat tradicionalment alguns dels llocs adients de contrast epistemològic.

Val la pena per exemple fer notar que sembla haver-hi alguns problemes en la pròpia noció d'unitat quan no s'usa sols el terme 'unitat' per a les dades extralingüístiques («així jo entenc per objectivitat una independència de les nostres sensacions, intuïcions i representacions, de les projeccions d'imatges internes a partir de records de sensacions passades, però no una independència de la raó»[10]); però d'altra banda és difícil d'admetre que '1=I', '4+3=7', etc., sense alguns esclariments i no queda clar si el zero és un nombre o que el terme 'nombre' no s'usi equívocament, a part de totes les dificultats que ocasionen els nombres molt grans (o les subunitats molt petites) o el mateix fet de generalitzar propietats i operacions, etc.

S'observarà més endavant que no seguim la que s'ha fet tradicional acotació del nombre (natural) a partir de l'equivalència de conjunts o el fet de ternir-lo com una classe de classes, i que hom troba fins i tot en les nostres llibres de text elementals. No es tracta pas, és clar, que no estigui ben representada en els últims cent anys (deixant de banda la indicació de Hume al Treatise I,3,1): amb els retocs corresponents, o fins i tot en marcs intel.lectuals prou diversos, entra dins de les consideracions de Cantor[11] (Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, 1878), l'usa si més no Frege (Die Grundlagen der Arithmetik, 1884)

---

[10] G.Frege, Die Grundlagen der Arithmetik, pàg.59; cf.també per exemple Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen?, pàgs.335-336, que avalua així mateix l'aritmètica, l'àlgebra i l'anàlisi com a parts de la lògica.

[11] El circumloqui es deu al fet que Cantor identifica «potència» d'un conjunt i nombre cardinal, però no confon unes tals expressions amb la de «conjunt» o, com també usa, amb la d'«equivalència de conjunts», cf. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslekhre, pàg.119; Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, pàgs.141,151, i tot el paràgraf primer de les Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.

-- Dedekind (Was sind und was sollen die Zahlen, 1888) emprèn més aviat un camí propi[12] --, es generalitza amb Whitehead i Russell (Principia Mathematica, 1910) i la segueixen lògics com Quine (Mathematical logic, 1940), matemàtics com el col.lectiu Bourbaki (Théorie des ensembles), etc. Però prenguem més aviat el nombre a partir de l'equivalència de classes (Frege) o d'una classe de classes (els Principia i tots els seus seguidors), afer segurament obviable[13], nosaltres no seguirem, dèiem, aquest camí.

¿Per què doncs tenir algun motiu de desconfiança d'una tal definició de nombre? Pel cap baix el lector podria recórrer a diversos expedients (i agafant sempre com a model la unitat): (1) l'artificiositat del recurs seria potser una objecció seriosa; normalment no creiem que una cosa sigui una per l'equivalència amb

---

[12]De vegades es posen en connexió els treballs de Frege i de Dedekind, però sembla que es fa amb un cert equívoc: si l'autor afirmà que «tots els sistemes infinits simples són semblants a la sèrie numèrica N i per consegüent també ho són els uns als altres» (ibidem, pàg.376; Dedekind treballa cabdalment amb correspondències, Abbildungen), per a ell el nombre aritmètic per excel.lència és l'ordinal que «en consideració d'aquest alliberament dels elements de tot altre contingut (abtracció) els nombres es poden esmentar amb tota justícia com una creació lliure de l'esperit humà» (pàg.360), mentre que la presentació del cardinal (cf.pàg.387) sembla prou fluixa. (Per a la importància de l'escrit tant en la investigació de principis com en la teoria axiomàtica de conjunts cf.la nota de Noether, pàgs.390-391).

[13]Lamentablement aquí hem de simplificar al màxim: fet i fet, per exemple, la definició de nombre de Frege passa per les seves nocions sobre concepte i objecte; transcriguem-la a tall de mostra: «L'expressió

«el concepte F és numèricament igual al concepte G»

tingui el mateix significat que l'expressió

«Hi ha una referència φ, que coordina unívocament per les dues bandes els objectes qua cauen sota el concepte F amb els objectes que cauen sota G».

Repeteixo:

El nombre (Anzahl) que correspon al concepte F és l'extensió del concepte «numèricament igual al concepte F»

i afegeixo:

«n és un nombre»

tingui el mateix significat que l'expressió

«Hi ha un concepte tal que n és el nombre que li correspon»

Per tant s'ha aclarit el concepte de nombre, aparentment, sí, per mitjà de si mateix, però no obstant sense falta, perquè s'ha aclarit ja «el nombre que correspon al concepte F»», Die Grundlagen der Arithmetik, pàgs.105-106 (recomanem al lector que no es perdi l'escriptura conceptual d'aquestes expressions a les Grundgesetze der Arithmetik I, §§34-42).

una altra cosa o pel fet d'entrar en una classe de classes d'un únic element; l'equivalència d'una cosa amb una altra o el fet d'entrar en aquella classe seria una condició suficient perquè el discurs pogués explicitar unitats, però no una condició necessària. (2) Un lector més conspicu afegiria que l'expressió «tots els conjunts que li són equivalents» o «una classe de classes» aparenta, sembla, que les nostres generalitzacions tenen un abast intel.lectual considerable, quan això podria ser posat en qüestió. (3) Però un argument cabdal que faria dubtar que el nombre fos una classe de classes estaria potser en el fet que, no diferenciant-se la classe-nombre de les classes que abasta, 'classe unitat' seria un nom d'igual ús que 'A,B', si 'A' fos l'únic membre d'una classe i 'B' l'únic membre d'una altra classe i prenent sols aquestes dues; ara, la circumscripció de membres i de classes és la seva individuació, i podria creure's que els termes 'individu' i 'unitat' són sinònims o gairebé[14]. D'aquí que si el nombre fos la relació biunívoca entre els membres de conjunts tampoc no semblaria que hi pogués haver relació sense individuació dels termes, on el mot 'individuació' tindria com a germà el d''unitat. S'objectaria doncs que la noció d'un conjunt o d'una classe ja és la resultant d'un treball analític i sintètic (en una accepció laxa dels mots) que, entre d'altres coses, ja ha destriat allò que anomenarem 'la unitat' o 'les unitats' -- per més que no usi uns tals mots; en d'altres paraules: la circumstància de no usar el mot 'unitat' (per exemple) no llevaria els fets lògics en el reconeixement d'un conjunt o d'una classe; en efecte l'avaluació d'una definició no es faria al marge d'una avaluació dels llenguatges, i podria semblar que aquí s'hi hauria escollit un camí desbrossat a l'engròs; i per això ja s'hauria suposat allò que en principi se circumscriuria amb la definició.

* * *

Caldrà haver esbossat així mateix les relacions entre l'aritmètica i la geometria o, millor, entre els nombres i les entitats de què s'ocupa la segona disciplina; en una primera accepció aquelles relacions haurien estat la conseqüència dels punts de mira adoptats en les reflexions anteriors, però alhora el possible apriorisme hauria pogut minvar una mica, o si més no hauria permès una certa autocrítica de les pròpies posicions, en la mesura que haguéssim intentat de resseguir històricament i en els orígens l'ús dels nombres en els afers geomètrics. En efecte la natura dels contactes entre les dues disciplines matemàtiques

---

[14] En aquesta accepció la consulta a l'obra d'Aristòtil (per exemple Metafísica X, 1 1052 a ss.) o a la de Tomàs d'Aquino (per exemple Summa theologiae 1 q.11 a.1c i a.2c) seria segurament alliçonadora.

esdevindria rellevant des del punt de mira de la pròpia matemàtica pel fet que sembla ser un camp privilegiat per a observar en detall i en la mateixa cosa el seu captenіment respecte de l'experiència, i permetria d'entrellucar algun criteri per a avaluar si la matemàtica és un llenguatge per a la ciència i com n'és una part més.

Però deixem-ho estar: el present treball vol circumscriure's a exemplificar el que hauria de ser un dels afanys de l'exercici racional anomenat filosofia; ni vol tractar de descabdellar, en l'accepció més estreta de l'expressió, les disciplines matemàtiques ni intenta un mer estudi de llur història, sinó que cerca cabdalment un específic àmbit racional (potser el d'una ciència primera) i per això també esbossa algun moment històric. Des de tots els punts de mira es tracta més aviat d'oferir un programa, potser millor un estil, que es mostra a través de l'avenç en una passa i que en la mesura que cerca d'acomplir una racionalitat forma part de la filosofia.

PART PRIMERA

Notes metodològiques a l'entorn del llenguatge

L'ús d'una llengua en les comunicacions fa considerar el seu paper lògic i l'establiment, quan sigui possible, de l'accepció de les paraules: n'és un cas el mateix mot 'lògica', i per això començarem per precisar el vocabulari elemental; la dificultat de la secció exemplifica que ens plau més aviat la riquesa de registres lingüístics fins i tot quan hi ha imbricació significativa, al capdavall un fet ben entenedor des del punt de mira de les nostres habituacions. Indicarem doncs els usos del llenguatge i del seu pensament, amb la qual cosa entrarem en contacte amb els sistemes de la lògica formal. Finalment caldrà afrontar d'una manera molt més directa la possibilitat lògica d'una generalització i l'estudi del seu abast, un fet de múltiples repercussions tant en el camp de la lògica simbòlica com del pensament en ~~general~~ conjunt.

Es tracta d'una colla de punts metodològics prou rellevants que tenen interès tant presos individualment com en llur resultant ~~conjunta~~ global. No sempre arribarem, és cert, a totes les conseqüències de les conclusions parcials, però és possible que hàgim reeixit a apuntar-ne aquelles imprescindibles per a la comprensió de la segona part del treball.

I

LÒGICA I LLENGUATGE

Començarem l'estudi amb algunes indicacions de la naturalesa de la lògica i de l'ús del llenguatge en la mesura ~~mida~~ que tota exposició a un altre individu no pot estar-se dels mitjans formals alhora que qualsevol consideració per a un mateix conté algun estat de coses. Som en el començament i els inicis han de ser, sembla, apunts elementals.

§1. Nota preliminar.

Tractant-se d'un començament sembla que caldria assumir tantes poques coses con sigui possible i que hauríem d'indicar per què convé d'admetre precisament aquests mínims i d'on prové que els hàgim acceptat. Ho esbossarem amb uns punts que sols volen ser orientadors per al lector, tot usant el llenguatge d'una manera desimbolta:

(1) S'observarà que s'hi segueix l'«esperit» positivista en l'accepció que «tenim» allò que veiem, toquem, sentim, etc., i que qualsevol altra entitat necessita com a mínim una justificació _ad hoc_ a partir de coses ~~donacions~~ més o menys admeses; aquí caldria que el lector fos radical: car per exemple qualsevol discurs sobre les mediacions socials, lingüístiques i, en conjunt, antropològiques són de vegades bastant dogmàtiques en els cercles filosòfics en el sentit que pressuposen un discurs implícit sobre els començaments o, com diríem des dels nostres pressupòsits, que les determinacions s'agombolen; admeti's doncs que res no és històric, sexual, econòmic, lingüístic, etc., més que per un estudi de la història, de la sexualitat, de la relació econòmica o del fet lingüístic, etc., i que qualsevol entrada d'un afer «de pes» hauria de passar pel llibre d'admissions a partir d'uns mínims.

D'~~una~~ altra banda ~~part~~ si el nostre positivisme no recau, sembla, en les tesis empiristes, no ho faria pas per l'apriorisme de no voler que hi vagi a parar, sinó més aviat perquè les impressions (per parlar com Hume) semblen afers derivats dels quals caldria una justificació, no serien dades primeres, i el fet que l'estudi del filòsof les hi admeti pressuposaria potser un començament implícit: analitzant quelcom, hi hauria un tal quelcom, i l'admissió de l'anàlisi com una activitat rellevant, etc.

Però el positivisme metodològic que perseguim evita més aviat l'encarcarament metodològic: no pressuposa pas què podem trobar i què no, precisament perquè bandeja l'apriorisme; la constància del positivisme no hauria d'implicar, sembla, la uniformitat del seu contingut: el positivisme és, com diem, un «esperit» que anima la metodologia, i aquesta, en conjunt, se les ha d'haver «amb l'afer tal qual». Això implica que no hi ha previsió de les dificultats amb què podem topar ni dels retocs nocionals que la marxa discursiva farà necessaris; es tracta d'un fet de cap a cap rellevant perquè obliga a constants revisions dels nostres estudis i precisament per mor d'un positivisme bàsic: qualsevol pensador convindrà que les seus progressos són una funció dels seus fracassos en els varis aspectes del saber.

(2) Les precaucions lingüístiques que trobarà el lector al llarg de l'escrit provenen d'haver-nos pres seriosament les lliçons de les filosofies analítiques i fins i tot les concepcions lingüístiques defensades, per exemple, pel conductisme, segurament prou més extremes. Car l'admissió o el rebuig d'una tesi no sembla que s'hagi de decidir per les pròpies creences o conviccions al marge d'un estudi crític: no neguem pas que l'assaig de superar les pròpies conductes lingüístiques suposi uns esforços enormes, però això es deu al fet que el diàleg amb les diverses concepcions filosòfiques i psicològiques demana una revisió a fons dels propis plantejaments o, en un altre cas, l'assumpció sense reserves del nou pensament, és a dir, urgeix una alteració de les pautes de conducta tant lingüístiques com no lingüístiques, quan és possible que els homes tendim a una certa «instal.lació» comportamental, quan aquesta té bons resultats socials.

Com a mínim el llenguatge serveix també per a comunicar un ordre no lingüístic en la ~~mida~~ mesura que hi ha la defensa d'un qualsevol estatut lingüístic o la seva mostració; però nosaltres no mantindrem una tesi general sobre la funció del llenguatge perquè aniria contra l'assumpció d'una certa positivitat i de fet sembla que l'usem d'una manera prou diversa. Més aviat tendim a respectar els usos dels llenguatges quotidians i a esmerçar-los amb la mateixa llibertat de cada dia, malgrat que no sembla que puguem admetre assumptes importants sense una discussió prèvia de l'ús lingüístic. és clar que en una accepció es tracta d'un cercle viciós: perquè qualsevol explicació inicial de l'ús d'una paraula es faria mitjançant el llenguatge, i és aquest el motiu pel qual ensenyem els usos d'alguns dels nostres mots rellevants a través d'exemples patents: d'alguna manera sembla que no és possible avui dia cap filosofia que no comenci «ensenyant a parlar».

No hi ha doncs en nosaltres una crítica a les posicions analítiques o conductistes, sinó l'assumpció dels seus problemes, que en part es retornen tot demanant l'abast dels termes importants que s'usen; si voleu: presentem l'exigència que «ens ensenyin a parlar», per exemple que ens indiquin l'abast exacte del mot 'llenguatge', com hauriem de fer ~~comanda de mots~~ com 'sexualitat',
-ho igualment ~~un tal comanda~~ per a mots

'relació econòmica', 'història', etc. Perquè no es tracta pas de negar l'ús polisèmic d'un mot (o d'uns mots), sinó que no ens hàgim apercebut (i anotat en el nostre llibre d'admissions) que estudiem afers plurals i varis. En poques paraules: la superació d'algunes posicions de la filosofia del llenguatge no es fa per defecte, sinó per excés.

(3) Però tampoc no es trobarà aquí que els nostres inicis comencin amb una anàlisi de la constitució de les coses per mitjà d'un escorcollament intencional, ho pas així mateix per motius apriorístics, sinó més aviat perquè creiem que no podem fer treballar les nostres capacitats intel.lectuals sense un previ cop d'ull de les nostres activitats cognoscitives (anàlisi, síntesi, etc.) i això al marge ara del contingut que s'hi copsa.

Val la pena de fer observar un aspecte que, potser de tan obvi, no s'accentua prou: els afanys teòrics dels homes descabdellant la gènesi i l'aprenentatge del nostre coneixement i, en conjunt, dels nostres actes, explicant doncs com és possible que percebem tal i com ho fem, o que actuem així o això, hom ha tendit d'una manera implícita a creure's que allò explicat es derivava dels corresponents gènesis i aprenentatges, a través d'un interessant quid pro quo. Car sembla que és més aviat des de les nostres percepcions i des de les nostres actuacions que cerquem una explicació genètica, però que la mera suma de les nostres troballes en cap cas «és» la nostra percepció o el corresponent acte. En cas contrari l'«és» implicaria una usurpació de papers que caldria justificar.

En aquest sentit nosaltres no partirem pas de l'apriorisme que l'explicació sigui més rellevant que l'explicat i, en general, que un qualsevol moment no valgui d'una manera absoluta, és a dir, que no informi de quelcom que cap altre moment no pot informar. Es tracta d'un afer fonamentalment derivat del nostre esperit positivista, i que barra el pas a qualsevol reduccionisme de l'analitzat a les troballes d'una anàlisi o de la resultant a les gènesis i als aprenentatges corresponents, i això, repetim-ho, al marge del contingut de les anàlisis i dels processos.

Per tant els nostres inicis no pressuposen l'anàlisi intencional dels moments o el seu aprenentge en l'accepció que aquella anàlisi o aquell estudi ja van valent d'una manera absoluta, són una activitat (i digressió) teòrica sense efectes per a d'altres estudis, i ara ens cal més aviat presentar les nostres operacions intel.lectuals; però tampoc no legitimen a priori una qualsevol anàlisi intencional o la gènesi de les nostres actuacions, car caldrà en cada cas que s'avalin ad hoc i d'acord amb una orientació positiva.

(4) Creiem que la nostra insistència en el caràcter absolut de la determinació reculli així mateix alguna cosa de les tesis existencialistes en la ~~mida~~ mesura que fa el moment (si voleu: una

seqüència o una esdeveniment que determina) irreductible a d'altres moments, i alhora que tot el contingut lògic -- l'existència tal qual -- sigui sols allò que abraça el moment. És possible en efecte que l'aportació cabdal de l'existencialisme hagi estat que res no pot explicar (genuïnament) allò amb què expliquem i que el límit de la realitat estigui en la pròpia actuació de l'home: s'hauria accentuat l'absolutesa i l'originalitat del que es troba. D'altra banda val la pena d'assenyalar igualment que la distinció entre objecte i subjecte (en un únic ~~un propi~~ acte que coneix) no és pas, en nosaltres, un punt de partida pels motius apuntats dalt en referir-nos a la intencionalitat.

Tanmateix

~~Però~~ no prejutgem cap tesi irracionalista: el nostre esperit positiu ens encamina més aviat a resoldre els misteris en els seus elements lògics, i confessem obertament que l'estudi de prou irracionalismes contemporanis han esperonat d'allò més el nostre radicalisme metodològic en la mesura ~~mida~~ que estava en qüestió, no ja la valoració sobre els objectes, sinó fins i tot el sentit de la pròpia activitat que els estudiava, per exemple com un reflex de condicions socials i històriques, d'una voluntat de poder o d'un esmerç sublimat. Aquí, com arreu, no n'hi havia prou a fer renúncia d'unes tals posicions a través d'una descreença menystenidora o a assumir-les d'una manera arrauxada. És més ens ha semblat que calia entendre pel cap baix els motius (lògics) per a aquelles valoracions, i convenim que tot això és impossible de fer-ho ~~d'entendre~~ amb un cert detall sense una expressa renúncia de quasi totes les preconcepcions.

(5) S'observarà que usem mots de la tradició filosòfica racionalista i idealista a l'hora de transcriure per escrit les nostres nocions elementals: el caràcter absolut d'un qualsevol moment semblava que feia útil les paraules 'moment' i 'determinació' (o el mateix mot 'absolut'), tant amb l'esperança que ajudessin a captar l'atenció del lector per a la singularitat del fet, com per la circumstància que no prejutjaven per se un contingut lògic, per poca bona voluntat que es tingués, cosa que permetiria a l'autor i al lector de referir-los a un contingut.

D'altra banda no hem trobat motius seriosos per a diferenciar l'ús del mot 'reflexió' dels usos dels altres dos mots anteriors: sens dubte es tracta d'un mot que pertany a totes les tradicions filosòfiques, que hauríem doncs d'acceptar, però alhora ens ha semblat més útil la seva generalització per a tota activitat humana per tal d'adjectivar-la d'acord amb el tarannà de cada acte; els motius profunds d'això menaria segurament molt lluny: basti fer notar que la divisió de les activitats humanes en teorètiques i pràctiques (i si voleu productives) no és tan nítida com sembla i que es fa difícil de capir que el pas d'un moment teòric a un de pràctic no pugui merèixer el nom de reflexió. Això, és clar, no vol pas substituir els usos quotidians del mot 'reflexió' («no el molestis: està reflexionant»), sinó que reclamem l'ús savi del mot també per als nostres propòsits i en atenció als usos que n'han fet els filòsofs.

Ens sembla així mateix que els mots 'relació', 'identitat', 'diferència', 'igualtat', 'anàlisi' i 'síntesi' pertanyen a prou tradicions filosòfiques, i que l'ús que en fem nosaltres serà estrany al lector, malgrat els nostres esforços per a ensenyar-li com ho fem: el problema neix dels nostres supòsits anteriors i que el lector assajarà mé aviat de projectar-hi preconcepcions, quan d'alguna manera està en qüestió aquí qualssevol pressupòsits. En afirmar que

A

és diferent del blanc del paper només volem comprovar <u>in situ</u> que diferenciem l'A i el blanc del paper, cosa que fins i tot podem fer en silenci: no hi ha res amagat, no pretenem ni saber que A és una lletra que s'anomena 'a' (per a la diferència servirien dues coses diferents qualssevol) ni hi ha cap voluntat d'ensenyar a dir 'a' o 'blanc de paper'; no cal que el lector admeti que «existeix quelcom que s'anomena...», sinó simplement que assumeixi la diferència de la manera més ingènua possible. Tot això valdria per a l'ús de tots aquells ~~ítems~~ mots.

és clar que aviat s'ofereixen problemes greus, per exemple el lligam entre relació i identitat, i el fet que nosaltres en una accepció primera no distingim entre l'una i l'altra. Això serà un considerable escàndol, quan si més no podria ser tingut quelcom tan antic com la mateixa filosofia i quan més aviat seria sorprenent que, pel cap baix en alguna de les seves accepcions, la relació no fos identitat: afegirem doncs alguna nota en el text que esclareixi l'accepció exacta d'un tal fet.

A més parlarem tot sovint de «dada lògica», de «posició», de «donació», etc., degut precisament al caràcter absolut dels moments: aquí no hi ha pas intuïció si amb això es creu que hi ha algú que intueix, la intuïció i la cosa intuïda, sinó el moment en persona. Però l'estimació que la lògica sigui també això no es derivaria d'un prejudici estúpid, sinó de la certesa que és important: no es tracta doncs de rebutjar la lògica lingüística (entenguem ara això de la manera que vulguem), sinó de valorar cada moment pel que és: i cada moment val d'una manera absoluta.

(6) Per tant la nostra metodologia no va contra cap pensador en concret ni contra cap escola en particular: no té «enemics», sinó que més aviat fa renúncia de certes passes inicials d'alguns autors, recula en els plantejaments justament per a assumir, i pel cap baix entendre, les plurals i dispars tesis de la filosofia contemporània, amb el convenciment que n'és deutora per al seu planteig. Creiem que a les acaballes del segle XX cal superar algunes pautes metodològiques vigents encara avui dia, però superar no és pas oblidar, sinó assumir llur problemàtica i fer-la comprensiva des d'unes altres posicions. Passem doncs «a la cosa mateixa».

§ 2. La determinació (la reflexió).

1. Tenim que

A

és diferent del blanc del paper -- la diferència és relació, identitat -- i la mateixa diferència és la que troba els termes de la relació, mentre els relaciona.

Però determino

A

com a mera 'A', això és com la determinació abstracta d''A'; el moment abstracte és aquell en el qual simplement no es determina una relació.

La relació entre 'A' i el blanc del paper no es troba ni en l'abstracte 'A' ni en l'abstracte blanc del paper, però s'ha de cercar en 'A' i el blanc del paper; diem això últim afirmant que la relació o identitat es codetermina amb 'A' i el blanc del paper. I també: els termes que estan codeterminats en la relació són una dada lògica en l'accepció que la relació determina justament termes.

Fem notar l'ús en principi indistint de les formes 'relació' i 'identitat', l'ús específic de les quals cal trobar-lo en l'aprenentatge de les formes[1]. D'altra banda la relació es

---

[1]És obvi que l'ús de fórmules del tall 'la mateixa (capsa, etc.)' o 'la identitat (d'un poble, etc.)' del llenguatge quotidià no pressuposen pas necessàriament cap relació i que un pensador podria esmerçar 'la identitat d'una taula' per a accentuar la individuació de la taula; avancem doncs que els usos lingüístics del llenguatge quotidià valen d'una maner absoluta; però per motius que exposarem tot seguit reservem el mot 'identitat' d'acord amb el nostre ús: fet i fet els altres usos del mot sols semblen tenir un valor emfàtic, que rebla el reconeixement d'una cosa, altrament es tracta d'una relació.

Nosaltres usem doncs 'la identitat d'A' com a frase el.líptica de 'la identitat d'A amb ella mateixa' (quelcom segurament molt poc original, car remuntaria fins a Aristòtil): la identitat d'A és la seva relació; però la relació d'A amb ella mateixa és una mera relació d'igualtat, paral.lela, per exemple, a la igualtat d'A i A (o a la diferència entre A i B).

Ara bé, la igualtat és una relació que sols s especifica per la donació lògica dels termes: en tant que relació no hi ha res més a dir, i per això si uséssim simplement de la mateixa manera 'identitat d'A' i 'igualtat d'A amb ella mateixa' i no poguéssim usar indistintament 'identitat d'A i B' i 'relació d'A i B', llavors caldria inventar un nou terme per a assenyalar el fet de cap a cap rellevant que la relació entre A i A, entre A i B o entre determina tant des d'un dels termes com des dels dos alhora.

A i si mateixa no està ni en el primer terme ni en el segon (cf. també § 17), i les difícilment superables paraules de Schröder a les Vorlesungen über die Algebra der Logik I, pàgs.19-21).

Fet i fet no sembla pas que el mot 'identitat' pugui ser de cap altra utilitat en lògica; per això és versemblant (deixant ara els usos quotidians, que valen d'una manera absoluta) que en lògica els usos lingüístics diversos entre 'relació' i 'identitat' provinguin de l'entenedora circumstància que hagi estat la igualtat d'A amb ella mateixa la que hagi tendit a acaparar el mot 'identitat' perquè nosaltres no tenim manera d'escorcollar una relació, d'analitzar-hi «on acaba la independència d'un terme i on comença la seva relació amb un altre terme», i per tant és prou còmode de circumscriure la identitat a la igualtat d'A amb ella mateixa on la relació es conjuga amb la indiferència dels termes.

És possible doncs que basti afirmar que la relació no està ni en un terme ni en l'altre de les relacions entre A i A, entre A i B i de A amb ella mateixa, però l'ús del mot 'identitat' és rellevant no pas per la igualtat sinó perquè hi ha relació, no pas perquè sigui aquesta relació d'A amb si mateixa (la igualtat és en qualsevol cas una donació lògica) sinó perquè indica que 'relació' i 'identitat' són d'ús intercanviable tot i que hagi estat la identitat d'A la relació que hagi acaparat en lògica el mot, afer del tot entenedor.

No ha d'haver-hi doncs cap escàndol pel fet de dir que la identitat és relació o que la relació és identitat: la diversitat d'usos lingüístics en lògica són més aviat especialitzacions a partir d'un fet primari, i per això hem de reclamar l'ús primer indistint dels mots 'identitat' i 'relació'.

Permiti-se'ns dues notes marginals: (1) Hom podria estar temptat també de seguir un tal procediments: que tot allò que no és idèntic és diferent, i que tant la identitat com la diferència són relacions. Però ~~llavors no podríem usar el mot 'idèntic' per a la diferència sense equívoc, alhora que~~ aquest ús de 'diferent' seria segurament infructuós: veurem que A és també diferent de A, però no ho seria pas cabdalment perquè no són idèntics ~~(que òbviament no , poden ser)~~, sinó per no ser iguals. Per això val més conservar el mot 'diferència' per a les coses que no són iguals, a més del fet que l'oposició d'identitat i de diferència no reblaria la peculiar circumstància que la relació no es troba en cap dels seus termes en particular. (2) Hi hauria encara un nou expedient: aquell pel qual usaríem 'identitat' com 'igualtat'. En aquest cas sembla que ens allunyaríem prou dels usos, no sols quotidians (dues flors iguals no les anomenem 'idèntiques'), sinó que potser trencaríem definitivament amb prou tradicions idealistes i racionalistes, quan si més no hauríem de fer uns tals usos dels mots que poguéssim fer comprensible a la llarga les altres escoles de pensament, o si més no que fóssim capaços d'apropar-nos a una tal comprensió.

Observem que entre

'relació'
'termes de la relació' A
'determinació'

'determinació $\underline{A}$
abstracta d''A''

hi ha una relació entre les formes de la llengua i
A
$\underline{A}$

Noti's que abans de determinar la relació amb les formes de la llengua, la determinació no relacionava (no determinava *així*) les formes amb allò no formal (i.e. el blanc del paper, 'A', '$\underline{A}$'): determinava cabdalment la relació entre el blanc i 'A' o determinava '$\underline{A}$'.

La relació amb les formes de la llengua no entra doncs en la determinació d'una relació o d'un moment no formals, fins i tot admetent que les formes tinguin part en les determinacions -- no en la relació, etc. no formals ~~ni en el moment no formal~~ de les determinacions -- i que per tant es pugui determinar una nova relació.

Finalment, si hom no vol haver-se-les amb formes lingüístiques, pot determinar en silenci[a].

---

[a]El fet que quasi emprem amb el mateix ús els termes 'relació' i 'identitat' no hauria de fer induir que intentem de practicar una lògica paradoxal: un dels signes més contundents que no intentem un pensament paradoxal està en el nostre ús de la negació i en la manera d'entendre el principi de no contradicció (cf. §20 punt 1), 12 que ens allunya definitivament de qualsevol aparença de seguir les passes de l'idealisme alemany. És prou sabut que el tema de la identitat i de la relació omple milers de fulls en la història del pensament humà, i que caldria un repàs exhaustiu, però l'experiència indica més aviat que hauríem de repassar el conjunt de l'obra d'un autor per a fer entendre per què tracta així la identitat i la relació.

D'altra banda segurament seria fàcil de fer veure, per exemple, que tant la identitat de Frege (p.e. a *Begriffsschrift* §8), com la identitat lògica entre dues coses pel fet de rebre els mateixos predicats (Peirce, etc., i fins i tot Aristòtil *Topica* VII 1 152b i Sant Tomàs *Sum.theo*.I,quaestio 40 a.1,3: els lògics moderns, però, fins i tot Frege, citen sovint Leibniz com el seu precedent) semblen inconcebibles sense la nostra assumpció: de fet fórmules del tipus 'A ≡ B' -- on 'A' i 'B' són noms propis -- (o qualsevol fórmula d'identitat a través de predicats) indicarien més

2. Quan considerem això

diem que hi ha una ratlla, que hi ha una cosa blanca i també, si voleu, que hi ha una relació entre la ratlla i el blanc del paper codeterminada en els dos termes abstractes.

és indubtable que el nostre reconeixement de les coses (una ratlla, una cosa blanca) esdevé pràcticament automàtic, automatisme que remet versemblantment a condicions d'aprenentatge; copsem un segment per un simple cop d'ull i és prou difícil d'acceptar que hi hagi aquí un estudi detallat i escorcollador; però el lector acordarà fàcilment que cal admetre un nou moment rellevant pel fet que hom pot creure que hi ha una ratlla o que hi ha quelcom blanc o que hi ha una extensió o que hi ha un paper, etc. (respecte de la possibilitat que un tal moment sigui un afer del cos, cf. més avall § 17); en d'altres paraules: la determinació depèn també d'allò que s'agafa (i.e. de quant es copsa) de l'abast de la determinació i anomenem 'síntesi' a una tal agafada lògica.

Per contrast amb la síntesi la reflexió que considera parts d'aquell tot per simple reflexió sobre seu o de les seves relacions s'anomena 'moment analític', i l'anàlisi serà qualsevol determinació a partir d'una síntesi.

---

aviat que la identitat és relació.

Alhora el fet d'esmerçar un mateix predicat per a dues coses diverses ens faria adoptar també que la identitat és relació, altrament forçaria una identitat fora de la relació, ~~per l'abandó d'un pensament posicional~~, cosa que nosaltres no sembla que puguem fer.

En conjunt sembla que des d'aquí seria possible d'encetar una discussió sobre l'ús de termes com 'identitat', 'relació', 'síntesi', 'diferència', etc., tant amb pensadors de caire essencialista com de caire empirista; caldria, és clar, una reflexió particularitzada per a cada cas: no podríem tractar de la mateixa manera un autor com Husserl, el qual duria els nostres afers (relació, síntesi, etc.) a la seva condició de possibilitat (cf. per exemple Ideen § 80; sobre el pol husserlià els nostres treballs Sobre el problema fenomenològic del jo i Variacions lògiques poden ser útils), que el conceptualisme d'un Aristòtil; alhora els problemes d'un pensament essencialista es troben en una direcció oposada als que crea un pensament associacionista, que podria creure bandejar la identitat (com a relació), quan 'associació' sembla un tercer terme que pot gaudir així mateix de la seva mateixa significació, etc.

§3 .Dels usos varis de la llengua.

Ens ocupem de la llengua si més no quan diferenciem els noms, les paraules, etc., i els termes no lingüístics, etc., o quan considerem sols les frases i llurs lligams~~; i efectuant unes tals distincions lògiques assegurem que mentre tractem afers no lingüístics no ens ocupem de la llengua, tot i que hi entrin mots, en l'anar determinant aquells afers~~.

(seguit) Però les consideracions lingüístiques comporten un gran nombre de sorpreses: som capaços de vegades de relacionar quelcom no lingüístic i un element lingüístic (parlem de sentit ostensiu dels mots); 'l'home' és una forma, però es relaciona amb un individu, i 'l'home' es relaciona amb un segon individu; llavors "l'home" determina l'individu~~, i no és cap reflexió lingüística~~. Ara bé, no sembla pas que l'ostensivitat sigui el tret més genuí de la llengua; fins i tot quan es vol fer ostensiu un mot com 'la societat' tenim greus problemes: segurament podria determinar una síntesi imprecisa, encara que no ens creiem que la mera superposició d'individus faci una societat; l'ostensivitat de 'bon dia!' no mostra sempre la classe de dia que tenim i en les exclamacions hi trobem formalitats que caldria relacionar amb el cos i les seves passions vàries, etc.

La relectura d'aquestes poques línies certifica que no hi ha ostensivitat per a cadascuna de les paraules: un 'de', un 'que', un 'hi ha', un 'certifica', no tenen ostensivitat, o fins i tot no tenen una ostensivitat particular quan l'estudiem aplegadament amb d'altres paraules. Encara més: no tenim pas consciència d'anar imaginant o resseguint la naturalesa quan escrivim i quan dialoguem. D'aquí que hi hagi un problema greu: com usem el llenguatge quotidianament?

Doncs sense ostensivitat, això és, com a registre que té, si voleu, el seu propi contingut lògic (lingüístic): quan afirmem que l'home és un ésser expressiu o que té llenguatge això no comporta que hi hagi una representació continuada en l'expressió o en el llenguatge, sinó que les formes tenen la seva pròpia «virtut», que ens és útil en els nostres diàlegs solitaris, en la intercomunicació i quan escrivim. Però la virtut i el pensament de les paraules han estat apresos: en part hem après des de l'ostensivitat l'ús de mots com 'zebra' i 'girafa', i en part no hi ha hagut mai una ostensivitat específica per a paraules com 'de' o 'que'; hem après des de l'ostensivitat el domini, no ja de paraules, sinó de frases i hem après com anar relligant les frases. Però en conjunt l'ús del llenguatge no és ostensiu fins i tot malgrat l'aprenentatge, per més que hi ha un context extralingüístic com sigui que parlem enmig d'un abast lògic: en dir 'bon dia!' quan ens creuem amb algú hi ha quelcom no lingüístic que demana aquella formalitat, i en les nostres converses hi ha una relació d'homes.

El llenguatge té la seva pròpia virtut i pensament: té sentit o significació; expressem, diem coses, etc. Més endavant (§§ 27-28;32-33) ens ocuparem si hi ha una representació genèrica per als mots que poden rebre ostensivitat; diguem ara que no hi ha cap necessitat de creure que el pensament de les paraules provingui d'enlloc més que de la circumstància d'haver après el seu ús, això és, la virtut de les paraules és la de llur formalitat, i alhora la d'un element de conformitat de tipus comportamental: és un fet l'admissió d'una frase com a frase catalana o com una frase amb errors gramaticals, però també hi ha l'admissió de l'escaiença de la frase en el context, i per això trobem aquí un factor no merament formal.

Quan parlem o escrivim potser ara i adés cerquem ostensivitat per a allò que diem, però és segur que parlem i escrivim prou al marge de qualsevol ostensivitat <u>ad hoc</u>. El «misteri» de l'expressió és, en definitiva, el misteri del nostre cos, que ens forneix de mots carregats operativament de tal manera que el llenguatge esdevé un codi que en conjunt no té traducció ostensiva, que no són claus a traduir, sinó que ell mateix és la regla. Un codi que serveix així en el diàleg i un codi que, de fet, usem particularment. Que l'home sigui expressiu és un fet, i perquè ho és diem que l'expressió està al servei de les necessitats humanes; ens expressem i som bípedes: tant un fet com l'altre no tradueixen res.

Què determinem doncs quan parlem? Sens dubte no es pot dir <u>a priori</u>: si el llenguate té la seva pròpia virtut (el seu propi contingut lògic) -- i en aquest cas es tracta d'una formalitat prenys -- i alhora és quelcom que dominem com dominem el moviment de les cames, les situacions poden ser múltiples i variades: hom pot pensar únicament en la virtut de les paraules i llavors està fent un estudi fonamentalment lingüístic; però en el cas que estigui estudiant l'altre mentre li parla, talment com l'estudia mentre camina, hi ha un estudi de la realitat de l'altre; sembla sensat de creure que nosaltres determinem de vegades la situació extralingüística, ara pensem amb les paraules (i en les paraules), ara ens representem quelcom ostensiu per a les paraules, etc., i en cada cas la determinació és o simplement real, o lingüística (i formal) o relacional; finalment hom pot usar el llenguatge perquè vol determinar tant com pugui l'ostensivitat: en aquest cas s'intenta de determinar allò que no és lingüístic tot usant mots, però això mai no es fa d'una manera pura[3].

---

[3]Que els usos dels llenguatges s'avaluen també contextualment sembla ser quelcom bastant admès. El lector recordarà, per exemple, el treball d'Austin a <u>How to do things with words</u> (1962), les idees de la qual remunten al 1939.

La importància contextual i operativa del llenguatge es pot resseguir en autors de diferent signe. Consideri el lector el següent text de Wittgenstein: «<u>L'expressió «joc de llenguatge» ha de subratllar aquí que parlar el llenguatge és una part d'una</u>

Resumim: mentre en parlar hi ha sempre un contingut lògic (lingüístic), de fet podem determinar afers no lingüístics o el propi contingut lògic (lingüístic), sense que sigui possible una clara discriminació d'unes tals situacions, i més aviat les imbriquem; i en tot cas sempre és possible de determinar la llengua com a mer conjunt de formes.

§4. Codi lingüístic i filosofia.

Una certa dèria pels afers extralingüístics i per l'accent de la diferència entre el llenguatge i la resta de les coses és la resultant dels propis interessos lògics, quan ens adonem que qualsevol pensament lingüístic -- fins i tot el seu «contingut lògic» -- es resol en forma i afecció[4], això és en quelcom que té

---

activitat o d'una forma de vida.

Fes-te present, amb aquests exemples, i amb d'altres, la multiplicitat dels jocs de llenguatge:

Ordenar i actuar seguint les ordres--
Descriure un objecte per l'aspecte o amidant-lo--
Fabricar un objecte seguint una descripció (dibuix)--
Informar d'un esdeveniment--
Establir i provar una hipòtesi--
Exposar els resultats d'un experiment amb taules i diagrames-
Inventar una història; i llegir-la--
Fer teatre--
Cantar corrandes--
Endevinar enigmes--
Fer un acudit; contar-lo--
Solucionar un exemple de càlcul aplicat--
Traduir d'una llengua a una altra--
Demanar, agrair, renegar, saludar, pregar.

-- és interessant comparar la multiplicitat de les eines del llenguatge i de les seves formes d'utilització, la multiplicitat dels tipus de paraules i de proposicions, amb allò que els lògics han dit sobre l'estructura del llenguatge (i també l'autor del Tractat lògico-filosòfic)», Investigacions filosòfiques n.23. D'altra banda potser pocs homes han insistit tant en el caràcter operatiu, gestual (i alhora significatiu), de llenguatge, com M. Merleau-Ponty en els seus diferents treballs com a la Phénoménologie de la perception (1945), a Sur la phénoménologie du langage (1952), a Le langage indirect et les voix du silence (1952), a La conscience et l'acquisition du langage (publicat el 1964), etc.

[4]La resultant d'haver adquirit un repertori lingüístic no és en cap cas una mera forma (un mer so), car està assumit comportamentalment, però llavors, ¿què conté «casa» al marge ara de l'ostensivitat i dels afers extralingüístics? Doncs sens dubte

sols aquesta consistència, i per tant en quelcom que, per més útil que ens hagi estat, no sembla que pugui passar com el paradigma de la reflexió, de l'activitat. Sens dubte en els usos quotidians del llenguatge no és sols rellevant «el contingut lingüístic» tal qual, sinó que allò rellevant és el context lògic extralingüístic i lingüístic, és a dir, el moment en persona: en les nostres salutacions, diàlegs, ordres, jocs, etc., hi ha una relació d'homes i una colla de coses a fer, i d'aquí que, en aquesta direcció, els afers lingüístics afegeixen la seva consistència lògica a la consistència extralingüística.

Més aviat la possible competència paradigmàtica del pensament lingüístic tal qual provindria dels llenguatges de les ciències físiques i matemàtiques: ningú no sembla que pugui posar en dubte llur caràcter racional, i el supòsit que usen sovint mera lògica lingüística es confirma quan pensem per uns instants (sense esbrinar amb més cura l'origen de llur acceptació) en mots com 'massa', 'electró, '0,5326809 metres', 'paral.leles diverses per un punt a una línia recta', etc. és possible doncs que unes tals circumstàncies ens inclinin a rebutjar que la lògica extralingüística sigui el paradigma de la racionalitat, i cal admetre que de facto és així. Tanmateix la racionalitat discursiva física i matemàtica no lleva que, en la mesura que fa sols un discurs lingüístic, el seu contingut lògic s'analitzi en formes i afeccions, per tant que aparegui aquí la sospita que un tal domini lingüístic sigui una resultant, això és, que hi ha algun camí lògic (tot i que unes passes no substitueixin les altres) que mena des de l'univers extralingüístic a l'univers lingüístic, que fins i tot es recrea sobre si mateix, camí que en part no cal resseguir perquè és obvi, alhora que el domini lingüístic palesaria també una conducta apresa.

Els interessos pels afers extralingüístics també són doncs interessos per recuperar una mica alguns camins lògics, a banda que són necessaris a l'hora de clarificar supòsits i de rebutjar (o assumir) d'altres punts de vista. Però la ciència no sols és físico-matemàtica, i com a mínim caldria admetre així mateix que qualsevol discurs racional ordenat pressuposa en els seus orígens i en una part del seu descabdellament l'ús d'un llenguatge susceptible -- d'una manera o d'una altra -- de certa ostensivitat.

---

allò que l'estableix com un comportament lingüístic, que no és mera forma: el mot 'afecció' (i 'afeccivol') vol assenyalar aquest «plus» de la forma, i prenem aquell mot en el sentit d'una alteració. Cal adonar-se que sigui el que sigui aquest «plus» és quelcom del cos, malgrat que no sembla que hi hagi cap altre fet corporal que se li pugui comparar llevat potser de les afeccions comportamentals per les quals per exemple «sabem que podem prosseguir la inspecció de quelcom», i no cal dir que tot això és quelcom prou allunyat de les afeccions en l'accepció dels afectes i de les passions.

Per tant hi ha un interès universal pels afers extralingüístics, no pas per a substituir l'ús quotidià (i de la ciència) dels registres, sinó per a perllongar ordenadament les passes lògiques; no pas tampoc per a invalidar allò que mai no pot rebre ostensivitat, quan això també forma part de la nostra ciència, sinó precisament per a considerar l'origen de la seva acceptació, i les maneres vàries, i irreductibles les unes a les altres, en les quals quelcom no pot rebre ostensivitat.

Es tracta que volem descabdellar una branca específica de la filosofia que no substitueix pas les altres, sinó que mira per la diferència dels afers, els reconeix, i que intenta de comprendre la diversitat d'estils. I en aquesta accepció una tal branca de la filosofia fa d'enllaç entre els assumptes més quotidians i els més tècnics.

La necessitat doncs d'orientar-nos a partir de l'univers extralingüístic no prové d'un caprici, sinó del fet que és el terra on és possible de remetre l'ús lingüístic dels orígens de totes les ciències, i d'una bona part dels seus descabdellaments, malgrat fins i tot que més tard se'n facin autònomes i que es recreïn per si mateixes.

Per tant observi's molt curosament que hi ha un problema que deixem expressament obert, això és, fins a quin punt és necessari per a la pròpia raó l'ús de termes tècnics que mai no poden rebre ostensivitat (i els corresponents discursos), afer que és impossible de respondre a priori sense la corresponent investigació. I no amaguem que un tal assumpte ha estat també uns dels motius del present treball.

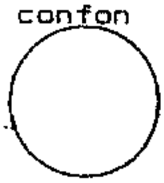
§5. Codi lingüístic i ostensivitat.

En el cas de voler estudiar la realitat no lingüística tot usant el llenguatge és obvi que el nostre discurs està a cavall de la determinació no lingüística i de la lingüística, i que ara va accentuant l'ostensivitat i la realitat no lingüística, ara viu sols de la virtut de les paraules. No hi ha manera de circumscriure estrictament el valor no lingüístic i el valor lingüístic: pel cap alt podem admetre, per la lectura del que hem fet o per la reflexió sobre el que hem dit, que s'ha fet més un discurs lingüístic que un estudi no lingüístic, però si usem la llengua ens exposem a viure la llengua. Per això ens plau de vegades, al costat del discurs, exemplificar ostensivament el nostre cas; per exemple l'ús del mot 'relació' per a

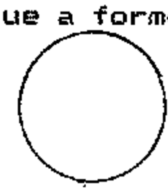
A B

justament per a bandejar qualsevol malentès.

Al cap i a la fi hom creu que la qüestió es troba a no confondre la pròpia virtut de les paraules amb la possible ostensivitat que se'n pot desprendre. O una altra vegada: es tracta de no circumscriure's de cap a cap a la pròpia virtut de les paraules en alguns moments de la marxa lògica. Fet i fet la correcció o la incorrecció d'allò que anem dient -- admesa la correcció lingüística -- passa també de vegades per allò que és real no lingüísticament: quan afirmo que «hi ha una església dalt de la muntanya del Tibidabo» la representació de quelcom per a verificar-la o falsejar-la és un últim recurs. L'estudi del llenguatge, en qualsevol cas, no és l'estudi de la resta de la realitat; hom no confon

 i cercle

per més que quotidianament en tenim prou a parlar de cercles sense representar-nos-en cap. Hem de respectar la propietat de la significació de les paraules i les frases sense que l'estudi de la llengua dugui <u>per se</u> a enlloc més que a formes i afeccions: d'altra banda he de respectar que tenint



em surti "cercle" per a determinar just aquest dibuix, i que el mot 'cercle' i la seva afecció es trobin en la determinació, però no com a analitzats; i que alhora no hi hagi aquí el mer registre: per tant "cercle" no s'ofereix com el moment del reconeixement lingüístic (i.e. de 'cercle', de l'afecció, del pensament del mer registre, etc.). Que després parli de cercles (com a registre lingüístic) és un fet, com ho és que qualsevol discurs es forneix del pensament de les paraules, del codi lingüístic i d'ostensivitat, en onades determinatives que oscil.len entre el fet de ser merament lingüístiques o no lingüístiques, com el fet de caminar comporta una certa atenció al propi cos i prou cura de la resta de la realitat.

Es tracta, en els pitjors dels casos, de saber per a què es vol usar el codi lingüístic, i la filosofia el vol usar <u>també</u> com un registre que expressi un ordre no lingüístic. és clar que qualsevol determinació de l'ordre no lingüístic que es vol plasmar lingüísticament en rep els efectes, i que per tant un llibre de filosofia conté si més no prou ordre merament lingüístic, i que es pot llegir tot ell com un ordre merament lingüístic. Però al cap i a la fi ha d'haver-hi una certa connivència amb el lector, i el codi lingüístic de la filosofia conté de vegades la insinuació d'abandonar el llenguatge en profit d'altres coses. Cap paraula de filosofia pot obligar el lector a abandonar el pensament de paraula -- que fins i tot pot commoure'l -- i usar-la per a d'altres coses: això és una tasca personal i intransferible. En aquesta accepció, la millor saviesa és la silenciosa: però com a homes ens expressem, i podem usar aquest codi per a una certa ostensivitat convertible en mer codi lingüístic per al lector, o per a un mateix.

D'aquí per exemple la imprecisió de «sentit», «significació», que -- en alguna de les seves accepcions -- poden ser registres per a assumptes de registres, o que poden ser registres que demanen el context no lingüístic en què es diuen mots o frases. Semblantment «expressar», «parlar», «dir», són registres que ens esclarim ostensivament pel fet mateix de proferir mots -- però també els podem usar tots quan ens ocupem cabdalment de fets no lingüístics. Hi ha -- hem de confessar-ho -- una ambigüitat generalitzada quan usem el llenguatge.

La garantia que podem usar el codi lingüístic també com una eina a l'hora de l'estudi d'afers simplement reals (treball mai no pur) està doncs en la pròpia activitat que ho fa: la diferència entre 'A' i 'B' o la diferència entre aquest full i aquell altre ho exemplifica. Això vol dir, és cert, que l'ús que fem del llenguatge en un cert estudi racional estrafà en part els usos quotidians de la llengua, però amb això s'hi poden introduir alguns malentesos perquè la llengua quotidiana s'usa de múltiples maneres i llavors es tracta d'accentuar més alguns dels seus usos (d'especialitzar-los); nosaltres hi estrafem la llengua perquè l'especialitzem, però un cert grau d'especialització no lleva que, en conjunt, usem prou el llenguatge com a registre i que s'hi introdueixin ací i allà prou recursos expressius.

D'altra banda adonem-nos que quotidianament no ens interessen pas els registres per se (un tal interès fóra una nova especialització) sinó que usem els registres enmig de les relacions socials o en els nostres diàlegs interns amb la certesa que allò rellevant sempre és el moment que es viu: la «vida» (permeti-se'ns parlar així) és el moment (lògic) sigui quina sigui la presència/absència lingüística que hi hagi: la conversa té les seves reflexions (determinacions) respecte de les quals, si el discurs lingüístic no hi «tradueix res», també és cert que hi és com un motiu més entre les coses plurals tot donant color al moment; per això l'assaig (perquè no és res més) d'usar el llenguatge com a «traductor i missatger lingüístic» del procés reflexiu té força interès: perquè aquí -- si més no en intenció -- està en joc el moment (la «vida»), es reclama un «estil de viure» en la proporció que procura de concentrar els usos de la llengua en alguns de més útils en la circumstància i perquè exigeix un cert control dels moments.

La utilitat d'un tal exercici és nul.la en una accepció: aquell que ja està bé no sembla que s'hi hagi de capficar massa; però és útil en la mesura que creiem que el que ens ensenyen els altres conté alguns erros i s'intenta de pensar els afers d'una altra manera, cosa que segurament no es pot fer a través d'un mer discurs-registre que val sols això (un hom pot ser indubtablement feliç fent discursos, però el lector comprendrà -- deixant ara el llenguatge de la ciència que mai no pot rebre ostensivitat -- que ho és en la mesura que no intenta l'ús de la llengua com a «traductor», sinó com a «donador de color»); és útil, també, en la mesura que explorem els moments reals, que una tal consideració esdevé la nostra consideració.

Per tant els nostres problemes no són pas sols el d'estudiar els diferents usos de la llengua (que també formen part dels interessos reflexius) sinó el de seguir els moments lògics (que «traduïm»), i per això també ens interessa el llenguatge, quan hi entra. Tanmateix els moments lògics no s'acumulen: el llenguatge que s'estudia no tracta del llenguatge que l'estudia (i que «tradueix» el moment), i això no és un problema del llenguatge-traductor sinó un problema genèric, com hem dit, de l'assaig de comunicar un procés lògic («vital»); per això també els possibles equívocs inherents: perquè tot el discurs que estudia un llenguatge pot tenir-se com a mer registre o com quelcom que incorpora si més no l'assaig de «traduir» una situació real (aquí sobre un àmbit lingüístic); és a dir, l'estudi del llenguatge és un estudi real que val per ell mateix i en aquesta mesura forma part dels nostres interessos vitals: mentre que qualsevol ús lingüístic val <u>per se</u> l'únic interès d'un estudi lingüístic rau a considerar aquest àmbit real tal i com ens és possible (cf. § 7).

§ 6. <u>L'afecció lingüística com a element expressiu</u>.

La circumstància que un registre es resol en forma i en el caràcter comportamental que anomenem 'afecció', que de fet pensem en(amb) registres, i que alhora puguem estar ocupats en afers extralingüístics -- sigui d'una manera més o menys ostensiva o no --, permet ara d'entrellucar aquell ús lingüístic que pel cap alt sols pot rebre, quan això és possible, una ostensivitat parcial, i això independentment de l'existència d'un registre <u>tècnic</u> incapaç d'una qualsevol ostensivitat («per un punt exterior a una recta hi passen dues paral.leles»).

En efecte el llenguatge és significatiu, té un contingut lògic, expressa, no important allò que atenguem o l'ús que en fem: una tal situació, dèiem, és comportamental, i ho resolíem en la forma i en la corresponent afecció. Circumscriguem-nos als usos ostensius del llenguatge: quelcom com

---

és una ratlla; la determinació ostensiva ~~"ratlla"~~ s'ocupa certament d'això que hem dibuixat, però alhora la determinació enclou la significació lingüística del mot 'ratlla'. No es tracta pas, és clar, que hi hagi sobredeterminació, sinó que l'anàlisi és capaç de descobrir la forma i allò que anomenem 'afecció lingüística' en la mesura que l'ús lingüístic de 'ratlla' no se circumscriu a la mera forma, i que alhora queda tal qual allò dibuixat; en d'altres paraules, "ratlla" no conté tal qual elements, l'ús de 'ratlla' per a aquell dibuix no conté tal qual dues significacions, sinó que és sols a través de l'anàlisi que admetem que s'afegeix als fets extralingüístics el contingut lògic lingüístic, o la seva significació; si voleu: l'expressió lingüística conté la seva significació, al marge que hi hagi ostensivitat o no, que atengui el contingut lingüístic, l'afer extralingüístic, o una mica de l'un i de l'altre.

Certament no hem dit res de nou: allò a remarcar es troba més aviat en el fet que la ratlla de dalt ens és prou accessible, però en afirmar que «hem estat estudiant durant una hora sencera» no sembla pas que hi pugui haver com a màxim més que un cert ús ostensiu i gràcies a alguna representació; en conjunt qualsevol afirmació que «englobi» un període de temps hauria de ser un recurs expressiu del llenguatge (contidria un tal significació lingüística), malgrat que no exclogui el vessant ostensiu («el transcurs de la meva vida» pot incloure el moment present), i que en aquests casos calgui sempre tenir en compte els afers extralingüístics a l'hora de revalidar o fer falses aquelles expressions (és fals que «haguem estat estudiant durant una hora sencera» quan avui no hem estudiat gens).

Per tant allò que sobrepassi una possible síntesi efectiva o representativa és ben segur sols expressiu, al marge de poder usar-ho com a mer registre (per tant expressiu), i tot això té múltiples implicacions i assumptes a tocar: (1) pensem per exemple en els plurals (cf. § 16) o en les generalitzacions («els homes», «les coses», etc., cf. §§ 27ss.), on en palesarem l'aspecte més aviat expressiu; (2) té la corresponent repercussió en l'enumeració (cf. §§ 36ss.); (3) introdueix el problema que nosaltres dominem les afeccions lingüístiques (cf. § 18); (4) alhora les significacions lingüístiques enclouen l'afecció de totalitats (cf. § 19), etc. Tanmateix també és interessant d'observar que uns tals usos expressius no introdueixen dificultats greus en la mesura que treballen més aviat com a «resums lingüístics», en conjunt (deixant els usos matemàtics i referint-nos sols al llenguatge quotidià) susceptibles d'alguna inspecció detallada, que en darrer cas és la seva avaluadora o rebutjadora.

II

LES COSES

Les últimes consideracions de l'apartat anterior han fet un toc d'atenció tant al supòsit de reduir necessàriament l'ús de qualsevol llenguatge a mer registre (és possible alguna ostensivitat) com al de creure que això és vàlid sense restriccions per al propi llenguatge. Orientant-nos doncs d'una manera decidida pels afers extralingüístics, no podem sortir així i tot d'un cert àmbit lingüístic àdhuc quan tractem afers elementals no lingüístics.

§ 7. El llenguatge que s'estudia forma part del discurs.

Dèiem (§ 5) que un estudi lingüístic és un estudi real, mentre que qualsevol ús lingüístic val per se: no podem substituir els usos de la llengua en la mesura que no hi ha acumulació de moments; per tant cal respectar que parlem d'un home, d'una ratlla, d'un color, etc. (com a registres), o que hi hagi "una ratlla"

"un home", etc. L'únic que podem fer nosaltres és una presentació de problemes reals però no substitutius dels moments, i precisament els introduïm en la mesura que reflexionem: en una accepció expliquem així els usos del llenguatge, si l'explicació és diferència i si no s'oblida que donar raó consisteix en un canvi d'objecte.

Però caldria tenir molta cura que el fet que l'estudi d'un llenguatge no estudia el llenguatge que el tracta (i.e. en el seu ús) no implica mai que el llenguatge estudiat no funcioni com a tal en el procés reflexiu on s'incorpora l'altre llenguatge: un tal supòsit convertiria l'estudi que val absolutament en un estudi independent que mai no esmentaria que el llenguatge treballa també com a registre o que és fàcil de veure que

-----

és una ratlla. Cal admetre que un estudi sobre el llenguatge incorpora l'ús d'aquest llenguatge enmig de les reflexions. En d'altres paraules l'estudi sobre un llenguatge és una ampliació reflexiva a partir dels moments on s'usa aquest llenguatge, i per això l'estudi (que usa llenguatge) sobre un llenguatge no s'oposa a aquest llenguatge, sinó que mentre hom usa un llenguatge com a registre o ostensivament hom hi va incorporant moments reflexius (amb més llenguatge). Si es vol: hi ha un sol discurs, una part del qual s'ocupa de considerar la circumstància que l'altra part ha usat llenguatge.

Nosaltres sabem, per exemple, què és una ratlla i que

és una ratlla; tot això, que val d'una manera absoluta, s'incorpora manifestament al costat d'altres possibles consideracions, per exemple, sobre el fet que nosaltres individuem les formes lingüístiques (categories gramaticals, etc.), les afeccions, els afers extralingüístic, sobre la relació entre aquella ratlla i el mot 'ratlla' o el registre corresponent, sobre la circumstància que 'ratlles' o ratlles anomena[1]

---

o sobre la d'anomenar amb un nom igual ('ratlla', 'ratlla') -- o registre -- l'una i l'altra ratlla, o fins i tot sobre el fet d'aplegar ratlles amb ratlles i homes amb homes, valgui el cas, etc, o al costat de la constatació que l'ún és un registre, l'altre un reconeixement extralingüístic, l'altre una forma gramatical, etc.; naturalment que fins i tot aquí reconec amb facilitat que això

és un ratlla, o que tot d'una diferencio entre aquest dibuix i el mot 'ratlla' o el mer registre corresponent, o que aplego amb un mínim ~~afecció~~ ratlles amb ratlles i homes amb homes, etc., però -- i tornant-hi -- serien les reflexions d'aquests fets que acompanyarien les reflexions que els proporcionen (tant les unes com les altres formarien part del procés lògic), etc. De tot plegat va brollant un estudi que no és irreal en cap dels seus moments i que incorpora la determinació quotidiana, una altra mostra que el llenguatge que usem no és un apart del llenguatge quotidià, tot i que n'és una especialització (cf.§5) i ara veiem a més a més que pressuposa un esforç de recerca.

§8. Algunes individuacions i relacions.

D'entre les moltes direccions doncs que permet un estudi lingüístic ara prendrem més aviat aquella per la qual usem noms o registres per a anomenar (o reflectir) d'una manera ostensiva afers extralingüístics, amb totes les reserves esmentades, és a dir,

[1]Sens dubte quan atenem el llenguatge com a tal llenguatge (i.e. quan pensem explícitament en problemes lingüístics) hi ha de vegades una ambigüitat respecte de quan el considerem registre o quan mera forma, que es correspondria al fet de simular el seu ús o simplement al fet d'atendre'l com a fenomen natural (so, forma escrita): és possible que en alguns casos no calgui diferenciar l'un factor i l'altre (per exemple quan estudiem la relació d'anomenar), malgrat que en d'altres una tal distinció sigui necessària, i que en d'altres encara no hi hagi cap ambigüitat.

assajarem de considerar perquè calen noms o registres diferents per a alguns afers extralingüístics, i ho farem més aviat a títol paradigmàtic. Alhora ens apressemm a admetre que no hi ha en això un començament genuí, perquè fet i fet podem analitzar i sintetitzar les coses de manera prou vària, i les relacions són així mateix plurals. Per tant les consideracions que segueixen, repetim-ho, tenen sols un valor il.lustratiu.

En els dibuixos

(1)
(2)

hi ha dues ratlles: llur reconeixement és ràpid, s'estableix en pocs moments i ho sabem per l'experiència mateixa, això és, per llur dada lògica. ¿Tenen alguna cosa en comú? La pregunta ens obliga a noves investigacions perquè no sembla pas que siguin iguals en una qualsevol accepció ni es tracta ara d'introduir noves relacions que no siguin donades. Allò més sensat de creure és que la pròpia inspecció lògica és la que les diferencia d'un home, per exemple. Prenent el nom d''individu' com a sinònim de 'síntesi', podem dir que aquells individus són diferents d'altres individus en l'accepció que la dada lògica ho palesa, i per això aplego (i reconec fàcilment) les ratlles. Un raonament semblant fóra vàlid quan estudiem ratlles rectilínies o curvilínies, circulars, etc.

Però la cara del paper on estic escrivint és una extensió, un individu: aquí també és la pròpia inspecció la que aplega aquesta extensió i l'extensió de la taula i puc afegir que aquests individus són diferents del paper o de la taula com a totalitats, per exemple, o que són diferents d'un home, i per això aplego (i reconec fàcilment) les extensions. ¿Diré que en la cara del paper hi determino les formes de les lletres o, en una altra direcció, que hi determino els elements motors (per exemple oculars)? Si més no els diferencio del blanc del paper, o de la visualitat específica del paper, respectivament, i fins i tot els individuo; però no determino alhora la lletra-individu/l'element motor-individu i l'extensió del paper, talment com no relaciono A i B i alhora individuo cada lletra, o no relaciono l'especificitat visual i l'element motor i alhora els individuo per separat, i tot plegat pel simple fet de no poder mai acumular reflexions. Es tracta més aviat que els individus no tenen un valor atemporal, sinó que valen com a moments de la marxa sintètico-analítica (o de qualsevol altra mena) de les reflexions; que de fet la reflexió vagi a una banda o a una altra és el que es pot anomenar la capacitat determinativa de l'home: l'extensió és un individu, si es vol, però un tal individu pot provenir d'altres moments sintètics, analítics, relacionals, etc., o és el terme d'una diferència amb una altra cosa. I la circumstància que individuem quelcom i la resta se'n diferencia és en qualsevol cas una dada lògica, per més que la propera reflexió, abandonant aquell individu, en trobi de noves: és per això que ens calen molts noms.

Anem veient que el fet d'aplegar ratlles amb ratlles, extensions amb extension, etc. es deriva simplement de la pròpia inspecció lògica, i la relació i la diferència amb d'altres individus reben l'afer: que el mateix espai d'aquesta tassa sigui un individu es mostra per la síntesi mateixa que no confonc, per exemple, amb la dolçor d'un caramel i la circumstància d'aplegar l'espai d'aquesta tassa i la del cendrer revela només que els motius es troben en la propia donació lògica respectiva.

Entre

A B

independentment de com es consideri hi ha diferència, com n'hi ha així mateix entre

A

i el blanc del paper. Però tenint

A A

determinem que són iguals o que són diferents segons què relacionem; perquè en tant que relació de coses visuals són, és cert, iguals: llavors 'la igualtat' és aquí un nom que pren la relació en tant que hi ha una dada lògica <u>ad hoc</u>, i la relació entre les respectives parts (anàlisi de termes) rebla la igualtat en cas de dubte, mentre la igualtat es codetermina amb els termes. Però en tant que relació de coses visual-motores (les as estan situades) són diferents. En qualsevol cas tant la diferència com la igualtat es troben en la relació i es codeterminen amb els seus termes; per dir-ho així, tant 'igualtat' com 'diferència' són noms propis per a relacions (identitats).

Agafant ara un nou aspecte afirmo que és blanc: es tracta d'una dada lògica i d'un moment abstracte que provenia versemblantment d'alguna anàlisi. Però i són igualment blancs: sabem que la relació es codetermina amb els termes i que la igualtat és una dada lògica en les relacions; afegim que en "un blanc és més blanc que un altre" hi ha indubtablement una relació codeterminada amb els termes; ara la <u>gradació</u> és simplement una dada lògica de la relació.

D'altra banda ~~un altra part~~ analitzant el meu paper dic que la seva superfície (o cara: per a l'ús del mot 'cara' cf. § 53) és blanca: el blanc és certament un color (i com a registre o dit per al meu paper té un ús absolut), però és fàcil de considerar que hi ha colors perquè el blanc, el vermell, etc. em semblen dades a diferenciar, per exemple, de la dolçor, etc.; o que hi ha diferents colors perquè el paper vermell es diferencia del paper blanc; o que hi ha colors a banda d'extensions, per exemple, perquè allò que és blanc de vegades no és una extensió (també la neu, valgui el cas, és blanca), o perquè sóc capaç de diferenciar el blanc de l'extensió de l'element motor en el qual la individuo. Però la diferència entre un blanc i la dolçor, o entre la duresa i un mal flaire, etc., són prou rellevants, no confoc pas aquests jocs amb un individu (un home, una pedra, etc.), i per això és prou sensat l'ús del mot 'qualitat' per a aquelles relacions i els seus termes.

Cal salvar com sempre que els usos quotidians s'han de prendre d'una manera absoluta, però val la pena d'anotar que, mentre que en " és blanc i suau" hi pot haver una diferència codeterminada amb els termes, també podem diferenciar després el soroll de fregadís en tocar-lo, i fins i tot es pot diferenciar la típica olor del paper nou; i aquestes simples diferenciacions també podrien ser moments analítics d'una síntesi més o menys global; o també: una síntesi <u>ad hoc</u> pot diferenciar-se en plurals extensions, extensions que alhora són síntesis que s'analitzen en elements visuals i motors, etc. ⊥ hi ha diferència.

Hem vist ja alguna cosa del camp visual-motor, i potser valdria la pena dir quelcom sobre el camp tàctil: de fet toquem alhora coses, i indubtablement hi ha una relació tàctil entre les puntes dels dits, relació que pot ser d'igual suavitat, per exemple, o més suau (i menys suau) en tant que suau, perquè en tant que dada tàctilo-situacional[1]. També aquí, àdhuc amb la mà quieta, hi ha una reflexió individuadora d'una extensió tàctil; alhora, enmig d'una síntesi amb les sensacions cinestèsiques i de situació, molt possiblement el fet d'abraçar quelcom amb els nostre braços individua un espai tàctil. Allò que s'ha de tenir present en qualsevol cas és que, de determinar un espai tàctil, no hi ha una determinació de determinacions: no hi ha una individuació d'espai tàctil al costat d'una individuació d'espai visual; el que hi ha és una síntesi visual o una síntesi tàctil o una síntesi global, etc. No s'han de confondre els mots amb les determinacions: el camp visual es coordina amb el camp tàctil, però això és una simple relació de termes des de les respectives individuacions.

§ 9. Allò real i la realitat.

Passem breument a un nou aspecte, perquè en prou casos som capaços de diferenciar també quelcom natural de quelcom imaginari (i en d'altres potser no), i és possible que anomenem 'real' allò que és natural. Però en una nova accepció podríem anomenar 'real' tant allò que correspon a la natura com a les imatges, i en aquesta accepció una qualsevol reflexió, fins i tot un mer pensament lingüístic, seria doncs real: la circumstància que no hi hagi res que no sigui real en aquesta segona accepció, fa que no es trobin afers ostensius per la diferència dels quals establíssim (en la digressió) l'ús del mot 'real'; per dir-ho així, el mot 'real' és un mot-jòquer, quelcom útil, malgrat que el seu ús no compromet que no estiguem determinant afers extralingüístics (i.e. 'A' és real), i en això precisament rau allò rellevant del mot: la universalitat del seu ús.

D'altra banda adverteixi's que allò irreal nega allò real; per tant, com veurem més tard, no havent-hi res que no sigui real en aquesta accepció del mot 'real', reenvia (quan no el tractem com un fet merament lingüístic) a una investigació iterativa: però també fa aquí rellevant l'ús del mot 'real' la possibilitat de negar que hi hagi quelcom, i.e. el fet de superar un discurs.

---

[1] Usem l'expressió -- un pèl potinera -- 'tàctilo-situacional' per a la informació tàctil del tipus de la suavitat, i alhora per la que tenim a partir de la «tensió» muscular fins i tot en el cas d'aturar els moviments, això és, incorporaria uns elements estàtics o motors específics al costat ~~de la comprensió i~~ d'altres dades a investigar en una experiència d'aquest tipus.

En efecte l'ús del mot 'real' no és sols quelcom merament útil (o fins i tot arbitrari), car el pensament (lingüístic) de «quelcom no real» conté la seva pròpia informació lògica (i alhora és ben bé real): llavors hi ha una contraposició entre la informació de «quelcom no real» (que reenviaria, com dèiem, a la iteració quan hi cerquéssim una informació no lingüística), i allò real; independentment doncs de la desproporció lògica, aquí trobem una diferència palesa entre el paper real on escric i, per exemple, el caràcter irreal d'un punt extralingüístic sense parts.

Que la reflexió sigui real implica, és cert, que allò que és real és simplement allò que està posat: es tracta, quan no fem registres, de meres repeticions amb mots diversos, l'ús dels quals permet, com hem vist, algunes digressions, malgrat que després els usem amb independència d'uns tals esclariments i com a mostra del notre domini lingüístic i del seus (nostres) propòsits. Ara bé, les nostres síntesis no reconeixent sols vermells o extesions, sirenes o espais tàctils, etc., sinó que també abastant allò que l'anàlisi pot desbrossar en una taula, una paret (o en qualitats, o en espais diversos, o etc.), unes tals síntesis que no són pas d'això o d'allò, són simplement reals, i és possible que usem comunament el mot 'realitat' per a uns tals reconeixements, sense que això informi massa sobre la part de l'abast compromesa. Tanmateix és possible així mateix que l'expressió «tot és real» o «la realitat en persona» pugui referir-se a una síntesi prou extensa. Per això podem dir que un qualsevol individu (que és real), relació (idem) o anàlisi (idem) formen part de la realitat, en l'accepció que llur material lògic pot integrar-se en una corresponent síntesi, i no cal afegir que allò que és real i la mateixa realitat són fets absoluts, que els mots 'real' i 'realitat' s'acompanyen de llur afecció[3], etc.

10. Sobre l'espai.

Les consideracions precedents insinuen que no hi ha necessitat d'acceptar un espai -- en la primera i cabdal accepció de l'ús del mot 'espai' -- fora de qualsevol donació lògica, això

---

[3]Fet i fet l'afecció lingüística que enclou l'ús del mot 'real' en aquesta accepció podria haver-se après versemblantment a partir dels seus altres usos (quelcom seria real quan no és imaginat, somniat, fingit, etc.): l'ús universal d'aquell mot també es forniria expressivament de significació (lingüística) traslladada. Aquest ordre de consideracions indicarien així mateix que una certa imbricació dels usos de mots diversos es deu a les pròpies necessitats expressives de l'home, i alhora ens hauria de remetre a l'origen social del llenguatge, en conjunt, i a la depedència del llenguatge de la filosofia a la pròpia tradició filosòfica, en particular.

és, que no cal que sigui un fet no lingüístic i independent de quelcom qualitatiu.

En efecte la síntesi de l'espai s'analitza, i qualsevol dels moments d'anàlisi és un moment de partida d'individuacions d'extensió, per exemple; ara bé, l'anàlisi de l'espai permet d'altres individuacions que no són plans: qualsevol anàlisi d'un espai pot remetre a un nombre indeterminat de direccions i amb les individuacions corresponents, al reconeixement de la dimensió. Però que la relació des de dues dimensions possibiliti una individuació extensiva o no no brolla sinó pel treball lògic corresponent, no és decidible de manera prèvia. A més per a totes les direccions que permet una extensió hi ha en principi les corresponents dimensions, i en el pla, com a mínim, cal considerar dues direccions que no es troben en la mateixa dimensió: per això diem que el pla té dues dimensions. En qualsevol cas la dimensió apuntada té un abast lògic, hi ha una dada lògica.

~~diem que el pla té dues dimensions. En qualsevol cas la dimensió apuntada té un abast lògic, hi ha una dada lògica~~.

Per la seva banda el punt no sembla en una accepció cap idea reguladora: en definir el punt com a privat de dimensió no fem sinó considerar com a irrellevant la dada lògica resultant de l'anàlisi; veurem més tard que la negació («cap dimensió», «sense dimensió», «no dimensió») no elimina la determinació sinó que assenyala el mal ús del mot 'dimensió' deixant intacta la determinació lògica no lingüística. En definitiva la definició del punt com a «quelcom sense dimensió» no fa més que recaure o en els mers mots (i pensament) lingüístics o en una moment imaginari (amb dimensions) o va determinant iterativament (d'acord amb el pensament lingüístic que conté) en l'anàlisi, els moments de la qual encara tenen dimensió, i des d'aquestes «idealitats» deduïm la idealitat de la línia, del pla i de l'espai tot contraposant-los al punt, a la línia, al pla i a l'espai extralingüístics.

Apuntem un nou vessant: la il.limitació o la infinitud neguen la limitació o finitud. Veurem que la negació es deu al bon ús o al mal ús dels noms per a les seves significacions; però quan es diu que "això no és negre" no s'ha donat encara el nom correcte, per tant el nom 'infinit' o el nom 'il.limitat' sols esmenten que no podem usar els noms 'finit' i 'limitat' mentre que no ens assenyalen cap significació; llavors com que tot el que podem determinar pot merèixer en certes circumstàncies el nom de finit o limitat, la il.limitació o és un mer registre o és un nom per a una imaginació -- no havent-hi determinació on valgui el nom 'infinit', podem reiterar les determinacions ad libitum, i per això el mot 'infinit' pot servir de comanda lingüística.

D'~~una~~ altra ~~part~~ banda la forma extralingüística 'exacte' s'introdueix per exemple en la igualtat. Però la igualtat s'estableix en la capacitat determinativa que tenim, quan s'estima que els dos termes tenen aquesta relació. Quan volem determinar una igualtat exacta, en una primera accepció allò que és simplement igual és exactament igual: hem determinat displicentment una igualtat, i més tard l'hem analitzada una mica i ens confirmem que són exactament iguals o que no ho són. L'exigència d'aparells amb més gran poder discriminatori s'incardina en aquesta capacitat d'anàlisi i de mesura. Però l'exactitud rep, en una segona accepció, els pros i els contres de la dimensió: no tenim aparells per a mesurar ad libitum ni tenim capacitats il.lògiques, i d'aquí també que l'exactitud esdevingui una passió; no es tracta que l'afany discriminatatori de l'home no esdevingui un afany d'anàlisi lògica, i per tant de positivitat lògica, sinó que l'exactitud s'està movent constantment en la certesa que hi ha encara un marge lògic no analitzat[4].

§41. ¿Quins són els elements lògics?

Abans de continuar cal esclarir alguns possibles malentesos: en principi l'esclariment remet, quan és possible, a afers extralingüístics, a la dada lògica i a la comparació amb d'altres individus salvant sempre el caràcter absolut de l' ~~seu~~ ús lingüístic quotidià (d'altres vagades els afers són més aviat lingüístics), i el límit d'això es troba sens dubte en la nostra capacitat d'anàlisi: es podria pensar sensatament doncs que qualsevol individu d'aquesta mena esdevé una complicació a partir dels moments analítics, siguin els que siguin.

Un tal pensament té una part de raó i una part que no sembla admissible: qualsevol anàlisi s'esgota sens dubte en elements i els elements d'anàlisi constitueixen efectivament la base analítica lògica de la donació de síntesis. Però això no sembla que hagi d'implicar necessàriament que nosaltres encalcem constantment tots els moments d'anàlisi que es puguin trobar a partir d'una dada qualsevol lògica.

Recordem de primer que la dada lògica és un abast; sols la reflexió permet parlar de l'abast de la dada lògica, és cert, però no hi ha una altra manera de fer-ho a l'hora de la comunicació; per abast de la dada lògica assenyalem que el moment lògic no és un irreal punt o instant; en el dibuix

---

[4] Essent la primera vegada que apareix l'espai potser valgui la pena d'advertir que hi hem descabdellat l'estudi de l'aportació de les diferències qualitatives en la mesura que era necessari: possiblement, per exemple, l'espai que no toquem sembla que contingui una manca; paral.lelament caldria repassar l'abast lògic dels models astronòmics respecte dels nostres cels, etc., però tot això serà tema per a un proper treball. Respecte de l'espai geomètric independent el lector trobarà fàcilment prou referències en les seves lectures: hi ha el cas amable -- per esmentar un clàssic -- de l'assaig de Poincaré de considerar les relacions de l'espai representatiu (el sentit) amb el geomètric (continu, infinit, de tres dimensions, homogeni, isòtrop, si fos euclidià), que accentua l'origen d'aquest darrer a partir dels grups de desplaçament (si més no es trobarien en potència en el nostre esperit, cf. La science et l'hypothèse, pàgs.68-91), que difícilment podríem acceptar. Al capdavall el lector pressuposarà que el nostre logicisme i el caràcter absolut d'allò que és real tant ens allunyaria de les posicions que defensarien l'espai com una mena de resultant corporal (Merleau-Ponty) com de considerar-lo a partir de descabdellaments genètics (Piaget), cf. el nostre treball Intentionality: reality, logos and open-endedness.

n'hi ha prou a determinar alguns moments per a treure que hi ha una continuïtat; no ens calen cent moments perquè la reflexió té un abast que corre per la ratlla i la individua.

Doncs bé, independentment de l'anàlisi o de la síntesi, l'abast del moment lògic és reduït o ampli i això fa també una dada lògica: quan estem analitzant una ratlla de segur que reduïm considerablement l'abast -- quan badem hi ha un estat de la dada lògica: el fet de badar és un moment lògic que anul.la els afanys disgregadors. Sovint no ens trobem en els extrems, sinó que reflexionem de tal manera que, ni escorcollem quelcom, ni bandegem la coherència reflexiva de la reflexió que segueix; més aviat apuntem moments, cadascun dels quals conté tot el que l'anàlisi esmenta com a ~~diferències i~~ relacions però que no es pensen així en aquells moments, de tal manera que a base d'aquelles reflexions anem fent una síntesi global, que retorna a moments d'anàlisi, moments possiblement motivats en prou de casos pel mateix abast (quan caminem ens adonem d'un obstacle, tenim dolors alguns cops, cal resoldre com transportar un paquet, hem d'anar situant-nos en el món circumdant, etc.).

L'estranyesa, la novetat, el perill, el nostre cos, estimulen segurament la cura per les coses, com ho poden fer la cerca urgent de quelcom per a menjar, per a usar o per a convertir. És segur, tanmateix, que nosaltres no ens obsessionem per a passar del menor element analític a un altre, sinó que anem fent com es diu: la doctrina de voler entendre tots els moments lògics com a derivats de moments analítics mínims és, ben mirada, una sobrelogicització -- una sobredeterminació -- perquè creu pensar un moment lògic a través d'altres moments lògics. Es tracta d'un hiperracionalisme que, quan es considera correctament, es veu que és una confusió lògica.

Un corol.lari d'això es troba fins i tot quan es determina per exemple un granit: es tracta d'un moment sintètic que s'analitza en percepcions visuals, en percepcions tàctils, etc.; però la pedra o aquesta realitat individuada és una dada lògica que no conté en el seu moment sintètic d'altres moments.

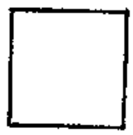
Un segon corol.lari es troba en el fet que la individuació de dues coses no cal que esgoti l'anàlisi de cadascuna i de les relacions entre les dues. Basta que hom hagi individuat cadascuna suficientment per tal de comprovar que tal és un granit i tal altra és un altre granit, i per això hi ha una possibilitat d'error per un excés de confiança o de falta d'anàlisi; però quotidianament les nostres individuacions no són exhaustives, en l'accepció analítica, sinó que en tenim prou amb ràpides individuacions mitjançant l'ús de l'abast lògic -- i el nom que entra en aquesta determinació permet prou reflexions lingüístiques, parlem de l'aprenentatge de noms i del seu bon ús o del seu mal ús. Si ara ens preguntem com és possible que aprenguem l'ús de mots iguals per a termes (aquest granit i aquest altre granit), cal respondre que això són fets lògics que no tenen, quan ho considerem sensatament, gaire més explicació.

§12. La cosa.

Agafem un tros de granit: tenim un individu al qual donem el nom de 'granit'. Mentre que l'ús quotidià del mot 'granit' val d'una manera absoluta també podem admetre que diferenciem aquest granit i la pirita, el propi abast lògic basta per a no confondre'ls. Però el granit és una cosa: l'ús quotidià no lleva que investigui l'ús del mot 'cosa' per al tros de granit que tinc (recordem que no fem un estudi exhaustiu de tots els posibles usos d'un mot, i.e. no estem estudiant simplement els usos del llenguatge, sinó alguns usos d'alguns mots, precisament en la consideració de la realitat no formal i com a digressió, cf. §7); però en una accepció no sembla que faci ~~res~~ molt més a l'hora d'anomenar el granit amb el nom 'granit' i amb el nom 'cosa': són quasi sinònims per al cas d'aquest granit (tot i que l'ús de 'granit' i el de 'cosa' no siguin intercanviables arreu); aquest individu és granit i és cosa, i també: 'individu', 'granit', 'cosa', 'síntesi' són <u>aquí</u> noms diversos d'aquest granit (malgrat no ser intercanviables en qualsevol circumstància).

Prenguem un camí merament lògic per a entendre això una mica més, per exemple

(1) ______________
(2) ____________________



on (1) és una ratlla, (2) és una altra ratlla, i no les barrejo d'una manera indiscriminada amb el quadrat; però el fet de no fer-ho no remet més que a la inspecció corresponent: la «necessitat» d'aplegar (1) i (2), no lleva llur diferència ni lleva la diferència de l'una i de l'altra amb un quadrat, això és, la inspecció lògica aplega (1) i (2) pel propi tarannà de la donació lògica i manté al marge el quadrat; que ara tant les ratlles (1) i (2) com el quadrat siguin coses només reflecteix que no m'interessa aplegar (1) i (2) per la donació lògica prou específica respecte del quadrat: però la síntesi d'una ratlla (o la del quadrat) no pot contenir com a donació lògica res més (no hi ha més diferència en tant que síntesi), i la diferència entre una ratlla i un quadrat sembla que hagi de recaure necessàriament o en el quadrat o en la ratlla i com a tal és sols llur diferència: tota la informació lògica és donda la que hi ha en el quadrat i en la ratlla i no hi ha més diferència que la que s'estableix entre l'un i l'altra. En d'altres paraules, la inspecció (i donació) lògica no pot aplegar les síntesis sense oferir-nos la ratlla i el quadrat, i no hi ha res més: la diferència de síntesis és la d'entre la dada del quadrat i la de la ratlla i el fet de creure que aquesta diferència té una especificitat pel fet de ser de síntesis sembla incloure un joc (i un miratge) lingüístic (la sort del mot 'cosa' és la sort del mot 'síntesi') -- si ho voleu també així, l'ús del mot 'cosa' per a la ratlla i per al quadrat no es deu (aquí) a la inspecció lògica, sinó al fet que és útil (un mot-jòquer).

Deixant de banda doncs els usos col.loquials i els registres, mots com 'cosa', 'síntesi', 'individu' (fins i tot 'unitat', 'ésser', 'cos', etc.) són tots noms-jòquers per al segment i per al quadrat. Però cal no confondre's de bell nou perquè

és una síntesi, una cosa, una unitat, etc., i usant els noms estic fent una determinació extralingüística (estic determinant allò que determino en "ratlla"): la circumstància que l'ús de mots iguals per a casos diferents no tingui cap correlat ostensiu no lleva que llur ús no reflecteixi el procés lògic corresponent; repetim-ho: els usem perquè són útils, no perquè hàgim de determinar mera llengua.

Endemés, i com ja insinuàrem per a la realitat, l'ús de tots aquests noms permet contraposicions lingüístiques, contrasts amb propòsits, etc., que ara no cal escatir més, i en aquesta accepció no sóm merament útils (o fins i tot arbitraris): la cosa davant la no-cosa (o, si voleu, el registre «diferència»), allò que és davant d'allò que no és, la unitat davant la simple cosa, etc.

D'altra banda dèiem que aquí els usos del mot 'cosa' i del mot 'granit' són gairebé sinònims per un fet obvi: l'ús del mot 'cosa' i del mot 'granit' introdueixen necessàriament la seva respectiva afecció lingüística.

§13. Les qualitats i el cos.

És important de veure l'ambivalència d'algunes qualitats respecte dels individus; tant poden entrar en la individuació del cos de l'home com en la d'altres cossos.

Cal considerar doncs com individuem el cos, perquè els camps qualitatius (visual, tàctil, etc.) no ho fan sense més, i l'afirmació que la duresa és una qualitat tàctil del meu cos és certa si no se la malinterpreta; fem-ho a través d'uns punts per a major claredat:

(1) En principi la individuació del meu cos no abarca el color vermell de la bandera o la dureça del granit, etc. Si el meu cos fos tot això llavors o no tindria individuació o la seva individuació contindria totes les qualitats de les coses. Però no hi ha una qualitat ~~abstracta~~ comuna al blanc del llençol o al negre → φ d'un vestit que se'n diferenciï, i per tant el meu cos seria ara el blanc dels llençols o el negre del vestit -- tot allò que reconegués, individués, notés, seria el meu cos, i qualsevol cosa seria un altre nom per al meu cos. La realitat seria un cos, i l'anàlisi real l'anàlisi d'un cos.

(2) Aquesta manera de veure les coses té certament una justificació, com veurem de seguida; tanmateix és una manera terminal de comprendre el meu cos que pot amagar una confusió. En efecte nosaltres individuem en una accepció ~~primerament~~ el nostre cos com individuem qualsevol altre cos: el nostre cos és quelcom que veiem i toquem, i els pros i els contres d'aquesta individuació són els de qualsevol altra individuació. Des d'aquí s'entén que els camps sensibles externs§ no entrin en la definició del meu cos, sinó que és en ells que l'individuem (cos extern).

(3) Les sensacions internes (dolor, cansament, etc.) no són tocades o vistes; el cos extern no té dolors: les sensacions internes entren en la donació de l'abast dels moments lògics -- entren com a dada en les determinacions que individuen el cos extern.

---

§A títol de suggeriment afegim les següents consideracions: sembla que la diferència qualitativa pot perllongar-se entre quelcom blanc i un dolor, per exemple, i per tant una sensació interna rebria també el nom de 'qualitat'. D'altra banda els noms d''intern' i 'extern' tindrien la seva utilitat a partir del fet que individuem el propis cos com a cos vist, tocat, etc., sense mai veure, tocar, etc., el dolor, etc., alhora que l'abast conté les corresponents sensacions (dolor, etc.); «intern» i «extern» són doncs «maneres de dir», i estrictament parlant un dolor no és «intern» (sí, en canvi, l'estómac), però cal reconèixer que es tracta de quelcom prou còmode. El problema està més aviat en l'ús del mot 'sensació': en principi nosaltres l'usariem per a les mateixes «coses» que són els termes d'una diferència qualitativa, i en tant que el terme d'una diferència qualitativa es diferencia, per exemple, de la síntesi de la cosa que la comprèn (un dolor, una experiència tàctil en tant que termes d'anàlisi del meu cos).

Noti's que l'expressió «camp sensible» remet simplement a l'abast lògic.

(4) Versemblantment una informació visual mai no és una sensació interna: però la qualitat tàctil que entra en la individuació de quelcom extern, per tant que ens lliura un fet que no és del nostre cos intern, <u>després</u> pot prendre's com un element lògic del nostre cos intern, precisament perquè l'individuem des d'un tal àmbit: mentre «allò tàctil» podria considerar-se <u>per se</u> ni «extern» ni «intern», el tindriem per l'un o per l'altre d'acord amb el camp en qüestió.

(5) Hi hauria per consegüent la possibilitat d'individuar un «cos intern», alguns elements lògics del qual podrien servir, precisament quan no els podem individuar com a afers interns, per a reconèixer coses externes.

(6) Això implicaria que puc individuar el meu cos extern, mentre en qualsevol cas prou sensacions internes entrarien en l'abast de la determinació que ho fa -- però també que podria individuar el meu cos, simplement, en un tot l'anàlisi del qual afirmaria que el veig, el toco i el sento internament -- o podria accentuar els aspectes interns del meu cos, fins i tot d'allò que servia per a reconèixer afers externs.

(7) Com a cas especial observi's que quan toco el meu cos l'individuo i alhora conté en el seu abast les qualitats tàctils internes del cos tocat -- puc reflexionar llavors al cos tocat i les qualitats ens informen del cos que toca, però aquí hi ha l'abast de les qualitats tàctils del cos que toca -- finalment els dos afers tàctils poden considerar-se com a dades del cos intern, o ser un mer abast sense programa d'una determinació diversa.

(8) En qualsevol cas sembla impossible de poder integrar sempre les qualitats visuals (i potser les auditives) en un cos intern: però fent una passa més, podria considerar globalment, a partir de reconèixer el meu cos, que «tot és el meu cos», però llavors allò que faig és individuar la realitat. En esmentar que tot això és el meu cos hi pot haver un encert en l'accepció que considero el meu cos i que hi individuo la realitat; però llavors hi ha un ús tal del mot 'cos' que el fa paral.lel al de 'realitat', quan quotidianament no els usem així.

(9) En efecte el nostre cos és en l'accepció quotidiana quelcom que veiem, toquem i sentim internament, i les altres coses no diem que siguin el nostre cos, fins i tot malgrat que prou elements lògics que entren en el reconeixement de quelcom puguin entrar <u>després</u> en l'àmbit del nostre cos intern.

(10) Finalment, només sé que les qualitats externes «tenen per condició el meu cos» <u>des dels fets lògics</u> (és una digressió des d'aquí)[4].

---

[4]Les anormalitat en la percepció <u>remeten</u> a alteracions orgàniques i psíquiques, i totes les percepcions <u>remeten</u> a l'aprenentatge (i.e.<u>derivem</u> coses a partir de les percepcions), cosa que equival a dir que <u>allò que anomenem 'realitat' té aquestes característiques</u>.

§14. Un exercici lògic.

El mot 'descripció' (o 'definició' en algun ús del mot) sembla un nom (més aviat vague quan no és un mer registre) per a un «procés»; en el millor dels casos quan descrivim les coses ens dediquem simplement a reconèixer alguns dels seus elements, i a tall d'exercici podríem estudiar ara una mica l'ús dels mots que hi introduïm (com sempre es tracta d'una digressió que no lleva el valor absolut de les nostres descripcions de coses), l'afer essent un estudi real a partir (i com a excusa) de l'ús dels mots en les nostres descripcions.

El granit és una pedra (i una roca); en una accepció torna a haver-hi aquí quasi una sinonímia entre l'ús de 'granit' i 'pedra', però no diem de qualsevol cosa que és una pedra, sinó que ho diem solament de les pedres: la inspecció compara, per exemple, aquestes pedres i l'aigua que tinc davant, i rebla l'ús del mot 'pedra' i l'ús del mot 'aigua' per als respectius termes; sens dubte és la millor manera per a no introduir nous noms; és clar que es podria prendre el mot 'cosa' amb els mots 'dur, compacte i sòlid' i tenir 'cosa dura, compacta i sòlida'. Certament una pedra és dura: és dura per l'experiència tàctil o pel xoc d'altres cossos damunt seu; en una pedra hi entra la seva duresa, i la duresa és una dada lògica.

Ara bé la duresa es determina en el xoc o compressió entre dos cossos: «entre dos cossos» pressuposa les respectives individuacions dels cossos, per exemple entre el cos de l'home i el granit; però l'apropament de la mà i el granit és una individuació específica de moviment en tant que es dóna com a dada lògica en la individuació del meu cos o en la individuació del granit o en el moment d'un abast que no es preocupa d'individuar el meu cos o el granit; i la compressió del xoc entra en iguals circumstàncies que el moviment que l'ha provocat. Ara bé, en el cas d'individuar el meu cos la compressió entra com a qualitat tàctil, com a sensació muscular, etc., si és que vaig escorcollant analíticament; però en el cas d'individuar el granit aquestes qualitats es transformen en dades d'aquest individu; finalment, quan es tracta d'un moment despreocupat tot això entra com a dada lògica no analitzada que es decanta sense un programa estricte.

Tenint a la mà un estri que xoca amb un altre cos, els moviments entren com a dades lògiques i la compressió pot decantar-se cap a l'individuació del meu cos o poden analitzar, des de l'abast global, la situació de la dada lògica: llavors la duresa, i.e. les qualitats tàctils i musculars, es duresa de cosa, d'<u>una</u> cosa, per més que les diferències visuals o el record (o la repetició) del moviment (tàctil o/i visual) de l'estri el diferenciïn.

Quan xoquen dos cossos independents del meu cos els creiem durs, sembla, perquè hem après en el nostre contacte amb les coses que dos cossos durs xoquen així.

Llavors, independentment que es tracti d'una dada d'un abast lògic o que hi hagi una individuació específica de duresa, quan determinem "una cosa dura", determinem en un individu un dels seus elements analítics, i hi ha aquí gairebé una sinonímia entre "una cosa dura" i "un granit dur".

Respecte de 'compacte'i 'sòlid' cal dir alguna cosa semblant: l'ús de 'compacte' implica segurament la continuïtat d'aquest espai tàctil o visual, i per tant permet una comparació amb d'altres realitats compactes. L'ús de 'sòlid' remet probablement a quelcom que torna a contenir com a dada lògica qualitats tàctils o sensacions motores de l'home: allò que és sòlid no es deforma per la pressió o la compressió de les mans -- i allò que no podem tocar ho creiem sòlid per l'aprenentatge; d'altra banda fa les seves pròpies comparacions amb d'altres coses -- i no cal que faci igualtats (hi ha «graus» de solidesa) -- per més que puguem dubtar en ocasions si es tracta d'un sòlid (les comparacions no semblen mai meres arbitrarietats, però no són necessàriament igualtats).

L'afirmació que el granit és una cosa dura, compacta, sòlida, permet si més no que analitzem els elements d'un individu. Però 'compacte' i 'sòlid' es diuen, sembla, d'una realitat espacial; certament allò que no és compacte també és una realitat espacial: la mà que s'apropa cap al granit pot determinar molt versemblantment un espai tàctilo-motor -- que diferenciem de l'espai tàctilo-motor del granit -- però en general no el determinem tal qual sinó que entra en l'abast de la determinació. Endemés hi ha arreu un espai visual: el granit en té en la seva compacticitat i solidesa, però resseguim l'espai visual per allò que hi ha de visual i de motor; hi ha el pas del granit a la taula, o del granit a la paret, d'aquí a la finestra, al carrer, al cel; tanmateix hom no roman en el camí: entre el meu cos i el granit, la relació d'espai es va determinant per les coses que hi ha entre nosaltres, com la relació d'espai entre la finestra i el carrer es determina pels obstacles que hi ha -- per això el cel està en un lloc bastant indeterminat (per més que hi apareixen les aus, el fums, els núvols, l'horitzó, etc., que ens hi orienten); indubtablement l'espai té moltes dimensions des del meu cos, però les he de resseguir: quan afirmo que no hi ha res al costat del

~~granit aquest res és precisament incapacitat d'individuar; les~~

granit aquest res és precisament incapacitat d'individuar; les quatre parets, el sostre i el terra individuen un espai per la relació que introdueixen ells mateixos. és clar que l'espai no sols és quelcom visual: la impossibilitat d'individuació visual no lleva la individuació tàctil i motora; jo també toco l'espai, l'ensumo, l'escolto, etc., i per això l'espai té dimensions visuals i tàctilo-motores, i en qualsevol cas es toca, s'ensuma, s'escolta. No existeix d'una manera no lingüística un espai buit perquè fora la pura indeterminació, quelcom que hauria de donar-se sense donar-se.

L'anàlisi doncs de quelcom compacte i sòlid és l'anàlisi d'un espai real: per exemple sembla que hi hagi petits granets, i.e. petites coses sòlides i compactes que es diferencien en el granit si més no pel color; 'color' pot tornar-se a prendre com un nom per a un terme per comparació amb d'altres qualitats i colors -- 'granet' és el nom per a un cos sòlid petit i manté una comparació espacial amb d'altres granets. En el cas de menysprear l'estructura granular del granit tindríem un esquema com el següent:

COSA ____________ COSA ____________ COSA

AIGUA ___(comparació)___ PEDRA ___(comparació)___ PEDRA

p.e.tou ____________ dur ________ dur
p.e.disgregat ____________ compacte__ compacte
p.e.líquid ____________ sòlid ________ sòlid
(comparacions) (comparacions)

GRANIT____GRANIT ____________ MARBRE
(comparació) (comparació)

p.e. d'altres
estructures (comparacions) estructura __ estructura
granular granular
p.e d'altres colors ______ colors __________ colors

on tenim que 'cosa' és un nom-jòquer, per tant tot allò que rep el nom de 'pedra' pot rebre el nom de 'cosa', però només aquelles coses que són, per exemple, dures, compactes i sòlides prenen el nom de 'pedra'. Indubtablement 'dur', 'compacte' i 'sòlid' són noms per a moments comparables amb d'altres moments lògics: mentre l'anàlisi de les pedres duu a aquestes comparacions hom podria considerar de manera independent aquella comparació entre coses dures o compactes en un estudi sobre la duresa o la compacticitat, etc. Tanmateix l'anàlisi de la cosa-pedra conté d'altres moments analítics que, podent-se prendre de manera independent com a colors diferents d'altres colors, també es ~~pot~~ podem prendre com a anàlisi d'un individu, etc. i llavors els moments de color, duresa, etc., ~~fan~~ estudiem el granit (el granit és una pedra, però sols la pedra amb aquesta estructura granular d'aquests colors és granit), que manté una comparació amb un altre granit.

Un individu doncs permet prou comparacions amb d'altres coses d'acord també amb els seus moments analítics: parlem de granit, de pedra, d'un cub, d'una cosa granular, etc.*.

D'altra banda tota anàlisi sempre és a recomençar, però sembla que estudiem allò que és més rellevant (o que ho considerem així), allò que ens serveix per a diferenciar les coses o allò que és útil perquè l'altre se'n faci càrrec. Segurament no és cap ideal el fet d'analitzar-ho tot : qualsevol moment té el seu abast lògic, és dada lògica, i no tenim motius en principi per a desconfiar-hi.

Per tant la reflexió posa en relació tot amb tot, però allò que no pot fer és superar-se ella mateixa perquè pel cap alt és donació: podrà apropar un blanc a un altre blanc que no és igual, però no pot apropar com a relació visual (sense canviar l'ús del mot) un blanc a un dolor. Hi ha òbviament tota una gamma d'ambigüitat lingüística (quan deixa de ser quelcom blanc per esdevenir gris o groc?) en qualsevol comparació (de pedra, d'animal, de vegetal, de color, etc.), entre d'altres coses perquè la nostra capacitat analítica o discriminadora no és indefinida i perquè les nostres observacions i distincions quotidianes (d'on prové el llenguatge que usem) sovint estan més en connexió amb les nostres necessitats corporals i socials que en un estudi sistemàtic d'unes qüestions. Tanmateix, en la ~~mida~~ mesura que som capaços de discriminar i d'analitzar -- o n'augmentem les possibilitats --, la llei que regeix, sembla, és la mateixa que en les nostres observacions i distincions més quotidianes: hi ha un ~~donació~~ lògic -- hi ha lògica -- i relacionem els afers d'acord amb una tal relació.

§ 18 . El cas d'«home».

L'home és un cas particularment interessant d'individu. D'una banda tenim que hi ha una comparació entre aquest home i aquest

---

*L'estudi de quelcom com «la neu és blanca» en termes de «la neu» i «cosa blanca» (cf.Boole, An investigation of the laws of thought, pàgs.27,52) sembla doncs del tot correcte: l'anàlisi d'un ús ostensiu de les expressions ens duu a les respectives comparacions.

altre home (i, si voleu, amb un ximpanzé), i que qualsevol home, en tant que realitat, pot tenir una anàlisi. Per tant 'home' o treballa a la manera del llenguatge quotidià o és el nom de cadascun dels individus que estem analitzant, però no pressuposa en cap cas la igualtat entre els individus (per més que hi pugui haver igualtats); d'aquí que també siguin prou útils els noms propis.

Tot això implica que l'anàlisi d'un home és la d'una cosa real, va havent-hi una reflexió amb el corresponent abast lògic o donació lògica. En qualsevol cas la reflexió és un fet, i no es diferencia més que formalment del seu abast: no cal dir que el moment lògic que analitza no té més explicació perquè tota explicació és una marxa reflexiva. En d'altres paraules el moment lògic, tal qual, és indefinible, inanalitzable.

Observi's que l'avaluació màxima del "jo penso" és la d'un qualsevol moment lògic en tant que s'hi determina un home o s'hi troba en l'abast: "jo penso" no pot diferenciar-se més que formalment de la donació lògica de la qual 'jo penso' és un nom, però també és veritat que permet analitzar en l'abast d'aquesta donació tot trobant un home o un cos. Aquest home o cos manté, d'una banda, una diferència amb un altre home o cos, però també té una individuació singular, i per això rep el nom propi de "el meu cos" o "jo com a home" -- per això la correcció o la incorrecció de l'ús de 'jo penso' depèn ~~de l'abast lògic~~ del moment.

"Tu penses" es diu també com a màxim en un qualsevol moment lògic en tant que s'hi determina un home o s'hi troba en l'abast. Aquest home o cos es pot també individuar, però en qualsevol cas la correcció o la incorrecció de l'ús de 'tu penses' depèn ~~de l'abast lògic~~ del moment.

Per tant pensi jo o pensis tu, la reflexió és <u>per se</u> injustificable, inexplicable, ingeneralitzable, inestructurable, indeterminable, etc.

§ 16. <u>L'estructura (a propòsit dels plurals)</u>.

Col.locats en plena ocupació escorcolladora de la realitat, plenament lúcids doncs que els usos quotidians dels mots valen d'una manera absoluta -- i que la nostra anàlisi també és absoluta -- podríem ara combinar els usos plurals d'alguns ~~noms~~ mots, quelcom que sols demana el reconeixement de cada cosa (i l'aprenentatge de noms), amb la nostra dèria lògica.

Per això ens serà prou útil el mot 'estructura' (o 'paral.lelisme lògic'); agafem per exemple

* *

* * *

on tenim prou individus i diferències; però observem que l'estructura no és la mera suma dels elements que hi trobem, ni és un afer impossible, això és, la sobredeterminació de relacions (tot i que hi ha l'afecció d'una ~~afecta aquest~~a història de relacions), sinó que en principi 'estructura' és un nom per a <u>una</u> síntesi (aquí la d'un àmbit extensiu, que enclou per tant el blanc del paper) de termes i d'entretermes; fet i fet els mots 'estructura' i 'cosa' semblen intercanviables en tots els casos que són noms per a síntesis, pel simple motiu que tant l'un com l'altre són mots-jòquer (i que «totes les coses són estructures»): de fet les <u>afeccions</u> dels mots són diverses perquè, en una accepció estreta, 'estructura' segurament es diu d'un aplec de coses ja reconegudes (l'estructura de les quals faria una <u>nova</u> cosa), i precisament ens interessa ara el mot 'estructura' en tant que ~~afecta~~ una anàlisi.

el seu ús computacionalment és una afecció d'

Llavors el fet de tenir

(1) ____________

(2) ____________________

fa una estructura (de ratlles), els termes de la qual són individus. A banda doncs que hom podria <u>interpretar</u> els noms plurals com a noms d'una estructura (és clar que també són sovint mers verbalismes!), observem que l'estructura podria ser més i més «enriquida» per l'anàlisi dels individus i les comparacions corresponents: sense entrar en detalls és fàcil de veure que es tracta aquí de dues coses fines, respectivament contínues, que segueixen cadascuna una dimensió, amb els respectius extrems, etc., on per tant les respectives síntesis i la síntesi de l'estructura permeten una anàlisi de les ratlles rectilínies i llur relació. Afegim una vegada més que no hi ha aquí concepte quan amb això s'intenta copsar alguna cosa diferent de (1) i (2); hi ha la ratlla (1), hi ha relació entre la ratlla (1) i la ratlla (2), puc comptar ratlles, etc. I així la igualtat do noms no comporta la igualtat de determinacions no formals: diem que (1) i (2) són igualment ratlles, però es tracta pel cap baix d'una manera de parlar a les envistes de llur estructura des dels individus: el misteri de la igualtat en el fet de ser ratlla es pot resoldre pel cap alt per la identitat de l'estructura de ratlles (si no és una conseqüència de l'ús de mots iguals).

Una ratlla pot entendre's, per si sola, com una estructura, i també com un individu que entra en l'estructura de les ratlles, i en l'un cas i en l'altre l'anàlisi en troba elements i compara els elements, respectivament, cosa que es podria traslladar per a l'ús d' un qualsevol nom (una cosa dura i l'estructura de coses dures, etc.).

Tot i això l'abast lògic d'una síntesi estructural no és indefinit, cosa per la qual la sospita de superar ~~d'abastar més que~~ la donació lògica ha de recolzar-se ~~en d'altres fets,~~ per exemple que hom recorda, en un moment donat, d'altres individus; el record és un fet i no sembla tenir massa explicació, però adonem-nos que el pas reflexiu de record a record no impedeix la limitació de l'abast en cada reflexió o en la síntesi possible, com la imaginació més sagaç no manté síntesis indefinides. Per això els usos plurals contenen tantes vegades afeccions (lingüístiques).

§17. La síntesi i la relació no depenen del cos.

No s'ha de infra~~menys~~valorar en cap instant la donació o l'abast lògic, certament prou fluctuable des de la relaxació dels moments reflexius despreocupats fins a l'anàlisi escorcolladora. Juga un paper considerable àdhuc en la imaginació: perquè la lògica movent-se en la natura entre moments sintètics, analítics i despreocupats, i en qualsevol cas hi ha l'abast o donació lògica que no es pot reconstruir perquè és un fet, la imaginació determina també despreocupadament o a través d'un treball analític i sintètic que permet una certa recreació, però també aquí els límits de l'anàlisi rauen que hi ha un abast lògic. Per tant hom pot analitzar prou la realitat en qualitats, però tan donat és una qualitat (que és dada lògica) com qualsevol altre moment.

En una direcció totalment oposada es creurà potser que la síntesi és un fet del camp. Ara bé, tot depèn de l'ús que hom faci del mot 'camp': perquè si se'n fa un ús sinònim, llavors esdevé evident que la síntesi és el camp. Però, ¿no comportaria la sinonímia de síntesi i de camp el fet que la unitat fos sempre un mateix camp? Ara, que el camp sigui un o no es manté indeterminat quan reflexionem en la despreocupació: la mirada a

constant

¿quina unitat fa?¿la d'un tros de ratlla?¿la de ratlla?¿la del full de paper?¿la de l'extensió?¿la de l'espai visual o el camp visual?¿la d'una realitat global? Francament no se sap: la reflexió despreocupada no individua les dades lògiques del seu abast. Per això el moment sintètic no s'ha de confondre simplement amb el camp.

Llavors el camp no explica tampoc la relació entre les seves dades: la unitat d'un camp és una síntesi i la relació entraria en la seva anàlisi; el miratge que l'abast d'una reflexió explica una seva relació analítica provindria des d'aquest punt de mira d'individuar l'abast (la unitat) i de relacionar «en el propi terreny».

Tot i això encara s'argüirà que, certament, no es nega que l'abast o el camp no esdevingui un més que per l'explicitació d'aquesta unitat, però que tota unitat, relació, etc., és una explicitació de l'abast o del camp lògic. Cal respondre que, efectivament, podria ser-ho, però com sigui que l'abast pot esdevenir *un* o *molts* (les individuacions d'aquest abast), simple relació o un joc de relacions, això implica que la implicitació de l'abast permet més d'una manera d'explicitar, i.e. possibilita opcions vàries. Per tant o remeten a una lectura «màgica» de l'implícit o arribem al final: que *ell* no dóna la relació o la unitat.

El cos, és cert, fa de mediador en qualsevol activitat, però l'afer no lleva que la relació 'A'/'A', per exemple, no descriu alguna cosa del cos: sembla que no cal discutir que, mentre qualsevol relació es fa a partir d'una situació natural, la descripció de la situació natural no esdevé una descripció neurofisiològica del cos, alhora que qualsevol descripció neurofisiològica no és l'activitat d'allò que es descriu. D'altra banda és prou versemblant que una gran part dels esdeveniments determinats per l'home (en la relació 'A'/'A' com en qualsevol altra determinació) remetin la nostra curiositat a les condicions corporals, però el valor cognoscitiu de les determinacions roman tal qual; veurem més avall que l'oportunitat de negar quelcom és un fet d'aprenentatge, però la negació, lògicament parlant, no és una qüestió antropològica; la neurosi, semblantment, remet al cos com a condició, però la resultant té el propi valor cognoscitiu, etc.: no hi ha res en el coneixement que faci dir «és una qüestió del cos» (excepte quan es parli del cos), cosa que no implica que no sigui el cos que ho hagi introduït en la reflexió.

¿Caldrà admetre -- i tornant-hi -- que la relació entre 'A' i 'A' és la constatació lògica de quelcom ofert pel camp? Sembla indubtable que es relaciona en el camp visual (aquí) o en el camp tàctil (la ~~pressió~~ relació entre allò que toca un dit i allò que prem un segon dit, per exemple). Però que la relació treballi en el camp segurament no comporta que sigui el camp el que fa la relació perquè el camp no compara: ~~perquè~~ si més no la igualtat entre 'A' i 'A' no està en un terme ni està en l'altre; la igualtat exemplifica eficaçment allò que és vàlid més enllà: que la relació entre 'A' i 'B' o entre 'A' i el blanc (del paper) no es troba ni en un terme ni en l'altre i que el camp ignoraria *per se* la relació.

¿Com s'introdueix des d'aquest punt de mira la *impressió* que el camp podria resoldre la igualtat i la diferència? Doncs pel fet que una relació descobreix la contigüitat a tall de dada lògica (de l'abast determinatiu): no havent-hi reflexió sobre la reflexió, la relació de contigüitat s'ocupa només de la contigüitat.

§18. Sobre els propòsits lingüístics.

Ens agradaria afegir d'una manera una mica més distesa una nota sobre l'ús «normal» del llenguatge que pot ser ostensiu. ¿Per què per exemple anomenem quelcom, fins i tot ostensivament, 'pirita', o 'pedra', o 'cosa'? Sens dubte hi ha un element de comprensió que anomeni quelcom per un nom ('pirita' o 'vermell', 'cosa' o 'qualitat'), sense més, per un procés d'aprenentatge (posats que això expliqui alguna cosa), però uns tals fets no explicarien que usem un nom o un altre, quan de fet en prodíem usar de plurals tipus, i precisament per al mateix fet extralingüístic (o de plurals tipus en plurals registres que no remetrien a fets extralingüístics diferents). Hi ha aquí, sembla, uns propòsits del parlant (quelcom que no superaria un cert grau d'afecció en prou casos) i una contextualització del diàleg o del monòleg, propòsits i contextualització que orienten el discurs, hi hagi afers ostensius o no.

Però sembla prou difícil d'«explicar» tots els «propòsits» i les «contextualitzacions»: és possible, i només com a exemple, que l'ús d'un mot o d'un altre obeeixi a la necessitat de fer ~~necessitar~~ adonar al comparticipe de l'objecte del nostre discurs («el test sobre la barana és a punt de caure»), o al propòsit de no particularitzar («de vegades cauen coses des de les terrasses»), de no saber com anomenar quelcom perquè és estrany (o per pobresa lingüística), etc.

D'altra banda es fa palès que tot això s'incardina en el domini general de la llengua, que la fa una eina d'allò que també esmentem com a «propòsits» del parlant, és a dir, que aquests desencadenen un discurs que «va de si» i que, quan treballa amb normalitat, els desplega, de tal manera que podem adjectivar de «lingüístiques» les orientacions de qui parla, independentment que hi hagi quelcom ostensiu o no.

Aquests assumptes tenen prou interès en si mateixos i alhora en tenen perquè qualsevol discurs de la ciència ha de recaure necessàriament en uns tal usos lingüístics fins i tot quan poden ser ostensius; però una part important de la seva pròpia terminologia es basa en el domini dels propòsits i de les afeccions lingüístiques tal i com ho fa el llenguatge quotidià: el mateix mot 'compte', per exemple, s'usa per a «quelcom» que «recull una història lògica», malgrat que pugui tenir un correlat extralingüístic — i ja hem esmentat abans els usos lingüístics que sols poden ser registres. En conjunt doncs es tracta de qüestions de facto, que contenen el material lògic que contenen (formes de la llengua, afeccions, contextos, etc.), que revelen doncs les profundes arrels antropològiques de tot el nostre saber, que reflecteixen per tant conductes humanes, que remeten a aprenentatges i que ens alerten de la temptació de fer ~~de les nostres vivències subjectives~~ d'una tal contextura lògica un cert prototipus-model, sense que

també

això obsti gens ni mica que no hi hagi saber, ni ciència, sense llur aportació, pel simple motiu que som homes.

Tanmateix adonem-nos que no comentem res que no estigués ja implícit en les nostres consideracions anteriors: que el llenguatge tingui la seva pròpia «virtut» i pensament és al cap i a la fi una altra manera de tenir present un fet antropològic, que dominem com dominem la resta del nostre cos (els moviments dels braços, la coordinació de totes les seves parts, etc.), que «va de si» en les nostres sol.licituds enmig d'un context no lingüístic d'altres homes i de coses, quan exercim una activitat literària, científica o quotidiana: parlem i pensem mentre la «nostra vida» s'està expandint en els afers no lingüístics d'una manera directa o indirecta.

§ 19. . ¿Què és l'experiència?

A tall d'excurs i prenent una direcció de cap a cap diversa voldríem afegir així mateix una nota sobre la possible constitució dels afers perceptius.

En efecte afirmem que el nostre cos, un tros de pirita, una tassa, etc., són fets donats: l'expressió 'fets donats' és d'igual ús <u>aquí</u> que la de 'cosa' ('síntesi', etc.); el canvi de nom l'explicaríem per motius interns del propi llenguatge filosòfic (per exemple davant la creença que la síntesi contingui elements <u>a priori</u> que podríem diferenciar d'allò <u>a posteriori</u>) i precisament per a reblar el valor absolut de la determinació (cf. § 1); però en conjunt una qualsevol operació lògica és un fet donat, no sols en tant que síntesi, relació, etc., sinó en tant que lògica, és a dir, s'hi comprometeria també allò que sols podem esmentar quan no treballa com a tal, i.e. l'abast lògic. Afegim encara com a terme sinònim a 'donació lògica' (i d'acord amb l'esperit de la tradició filosòfica) el mot 'experiència'.

Ara bé, que un qualsevol fet lògic (per exemple el cos en una qualsevol accepció del mot 'cos') sigui una donació lògica, una experiència, n'hi hagi posició (tot plegat bastant joc lingüístic) i que la determinació del cos <u>sempre valgui d'una manera absoluta</u>, no implica en cap cas -- ho hem insinuat -- que puguem superar el caràcter finit (deixant com podem introduir un tal mot) d'allò posat, experimentat, etc. És cert nosaltres sabem d'una manera automàtica què és el nostre cos, que és el cos que toquem, veiem, sentim, etc., ara (bandegem així mateix els usos dels mots com a registres); però versemblantment és aquesta facilitat de reconèixer el nostre cos (o una tassa, o un tros de pirita, etc.) la que remet a l'aprenentatge (cf. per exemple § 2): és clar que totes les reflexions de l'aprenentatge no estan contingudes tal qual en el moment que reconeix el nostre cos, tant les unes com aquest altre serien fets absoluts, i les primeres caldria tenir-le com a digressions del fet absolut on assumim aquesta cosa o aquella cosa;

la significació del mot 'cos' (quan l'usem d'una manera ostensiva) no conté doncs cap de les seves digressions, sinó allò que l'anàlisi (una nova digressió que valdria d'una manera absoluta) tindria per afers visuals, tàctils, passionals, etc., presents.

Tot això suposa en efecte que l'explicació sempre és un altre moment que l'explicat o, si voleu, que 'explicació' i 'explicat' són noms per a diferents moments. Però llavors, preguntaríem, ¿per què usem uns tals noms?¿no hauríem de considerar que l'explicació ve motivada per allò explicat? La resposta no és simple perquè té tants vessants plurals com plurals són les explicacions: ens circumscriurem doncs a unes poques qüestions:

Dalt dèiem que la significació (ostensiva) del mot 'cos' és simple i absoluta -- si voleu: que la cosa que anomenem 'el nostre cos' es dóna tal qual (hi ha una tal donació, posició, etc.). Ara bé la digressió que mena a l'anàlisi d'allò que conté lògicament i d'una manera present (visualitat, afers tàctils, etc.) té com a motivació el propi contingut lògic del nostre cos present, això és, l'experiència, malgrat que sols la podem indicar com a motivació en tant que ja hem fet l'anàlisi, etc. (la motivació és una explicació). Per aquest cantó els afers semblen ja prou clars.

Per tant la determinació del nostre cos val d'una manera absoluta i les anàlisis són unes altres determinacions. Ara bé, i com a qüestió de fet, el tarannà automàtic del reconeixement del nostre cos (d'un tros de pirita, d'una tassa, etc.), justament aquesta facilitat (per tant la pròpia determinació com un fet), a tall de motiu, mena la reflexió a dar-se explicacions, i també com a qüestió de fet som capaços de recordar i de reproduir d'altres circumstàncies; les explicacions de l'aprenentatge o de l'herència seguirien uns tals camins.

Però així i tot hi ha un altre aspecte: en la pròpia determinació del nostre cos hi hauria un factor, que sols es podria assenyalar per l'anàlisi, pel qual «sabríem» que continuarem experimentant el cos, «sabríem que té més escorços visuals», etc., factor que, és obvi, no viuria així (és a dir, no viuria per les reflexions que motiva: per tant una explicació tant de l acte unitari que el conté com de les previsions <u>ad hoc</u>), sinó que s'hi trobaria directament, un factor que podríem esmentar també amb el nom d''afecció', que seria del propi comportament determinatiu i que no privaria que la determinació del nostre cos fos simple i absoluta.

Val la pena d'apuntar que tant un moment analític com un moment que s'ocupa de l'aprenentage són així mateix afers absoluts, que contenen doncs noves motivacions analítiques i també la sorpresa de la seva facilitat, és a dir, que ens trobaríem en el començament: aquest caràcter circular de les explicacions és en part inevitable (l'anàlisi s'esgotaria en una accepció aviat, però llavors encara podríem potser reiterar-nos d'una manera imaginària), perquè no podem pas pretendre que no hi hagi ~~(quan és el cas)~~ contingut lògic o que no ens sigui ja fàcil. Però «una tal insatisfacció» sembla més aviat una passió, car qualsevol determinació val d'una manera absoluta i no deu res a les altres.

Però entre totes les motivacions (i les que vindran s'indicarien així a partir de l'anàlisi que les descobreix, malgrat que «ja hi serien» lògicament) n'hi ha unes de particularment importants: en efecte les necessitats dels usos lingüístics introdueixen encara noves consideracions si és que no volem caure en prou paranys, com sigui el cas que un ús lingüístic conté una formalitat i una afecció. El mot 'afecció lingüística', ho hem dit, implica sols aquesta alteració per la qual una forma és un mot de la llengua, un registre, etc., té significació fins i tot sense cap esment ostensiu, etc.

¿Per què afirmem doncs que els afers lingüístics poden embrollar aquí de bell nou les nostes consideracions? Doncs perquè en la ~~mida~~ mesura que usem un mot, l'anàlisi del seu ús (una digressió) és capaç de distingir-hi una forma i una afecció; però la forma i l'afecció és allò que esmentem com a 'significació lingüística'; alhora quan uso 'cos' d'una manera ostensiva per al meu cos no hi ha cap problema, car sols hi ha una significació pel simple fet que sols hi ha una determinació, sense problemes doncs fins i tot admetent (per l'anàlisi) la significació no lingüística del mot 'cos' i la lingüística.

Ara bé, ¿què passa quan esmento «l'experiència que he tingut del meu cos durant tot el dia»? Certament es tracta, ho mirem com ho mirem, d'una expressió absoluta, fins i tot si ara atenc el meu cos que com a tal no té anàlisi, però l'anàlisi (digressió) distingeix a les clares <u>l'experiència present i la significació lingüística del mot 'experiència' (que es resol en forma i afecció, i que entra així en l'experiència present</u>). Llavors quan usem el mot 'cos' d'una manera ostensiva té una significació absoluta i simple, fins i tot en el cas que l'anàlisi (una digressió també absoluta) sigui capaç de diferenciar la significació no lingüística del mot 'cos' (usat ostensivament) i la lingüística; però aquí apareix una doble possibilitat de digressions bastant interessants: d'una banda podem anar experimentant el nostre cos (visualment, palpant-lo, etc.), mentre que en qualsevol circumstància l'experiència present només és capaç de lliurar un escorç en cada cas (o un esdeveniment), és a dir, el repàs que duem a terme (o que ens representem) no té cap capacitat per a fer acréixer allò present ara, alhora que l'afecció comportamental «ens indica la continuïtat»; però d'altra banda a la significació lingüística del mot 'cos' li és igual l'escorç per a anomenar, conté la seva pròpia afecció, i versemblantment és aquesta afecció la que motiva també que creiem necessària una «completesa» perceptiva o que considerem que una perspectiva, un escorç, etc., no és l'objecte tal qual, la cosa en persona. D'aquí les apories que poden néixer de l'afany de tenir <u>diferents</u> escorços i alhora «haver de superposar-los»:

nosaltres podem certament direrenciar escorços, però llavors hi ha això, una diferència.

En d'altres paraules: una qualsevol cosa és un fet absolut, com ho és una qualsevol operació lògica, i l'experiència present se'ns lliura tal qual és[8]. Per tant quan ens procurem un ús

---

[8]A propòsit de la fenomenologia són prou suggerents els següents mots: «Hom sap que Husserl, sempre inclinat a considerar la percepció com el model més eminent per a les actuacions de la consciència, insistí infatigablement en el fet que l'entitat que "ve donada" en la percepció és l'objecte mateix ("der Gegenstand selbst", en terminoloiga de Husserl), per bé que allò que en ve donat consisteixi, tan sols, en un aspecte parcial de l'objecte, essent-ne només un abreujament que mai no podrà contenir la totalitat dels seus trets. Succeeix, certament, que no pas tot allò que esdevé significat es troba representat en allò que ve donat. Ara bé: cada cop que Husserl insisteix en aquest estat —— d'altra banda trivial —— de coses, en el fons està revelant una insospitada posició ambigua envers la noció d'"auto-donació". En realitat, en articular la seva quasi obsessió pel prodigiós pars pro toto perceptiu, Husserl ens dóna a entendre que la seva actitud en direcció a l'"auto-donació" o "Selbstgegebenheit" és ambivalent, atès que d'una banda n'enalteix la funció central tot i que, d'altra banda, manifesti una disposició indiscutiblement crítica envers aquesta noció. Aquest plantejament doble i contradictori el justifica Husserl mitjançant el recurs de conrear l'ambigüitat que rau d'una manera natural en el concepte de "venir donat en si mateix": per superficialment que hom l'analitzi, efectivament, aquesta noció cabdal lliurarà sempre dues accepcions concurrents. Es tracta del fet que, per Husserl, l'"auto-donació" o sigui la "Selbstgegebenheit" designa indistintament o bé la presència sensible o bé la representació íntegra d'allò significat... ... Hem de tenir en compte que, d'una banda, la percepció no té altra pretensió que la de transmetre l'objecte mateix, o sigui de lliurar allò que altres idiomes expressen amb força quan es refereixen al "selbst", "autó", "ipsum", o "itself" de l'objecte, i que en català hem d'anomenar "l'objecte mateix". Però tampoc no podem oblidar, d'altra banda, que mai la percepció no és tan ingenua que aspiri a poder-nos subministrar "corporalment" —— de fet, a re-presentar-nos —— allò que, en certa manera, en podríem dir una reproducció de la integritat de l'objecte, o sigui el caràcter identificador que els idiomes als quals abans hem al.ludit en diuen "dasselbe", "tauto", "idem", o "the same" en especificar la identitat de l'objecte referit, és a dir, els trets intransferibles que en català solem expressar amb la paràfrasi "el mateix objecte tal qual". Si tenim en compte aquest fet ens adonarem tot seguit que acabarà davallant en una circularitat insuperable qui aspiri a copsar els mecanismes de la percepció tot i prenent com a punt de partida la interpretació dels processos "auto-donadors" com a captacions d'una "mateixitat" (el "selbst", "auto", "ipsum" o

ostensiu dels mots som en una determinació absoluta, cosa que no
implica que la significació d'aquell mot no es pugui analitzar,
sinó que no es pot analitzar tal qual; i alhora qualsevol anàlisi
té el pros i els contres d'allò a partir del qual s'analitza (i.e.
en el fons no s'hi guanya res quan un vol explicar-se com és
possible que coneguem tal com ho fem).

* * *

Circumscrits per a l'àmbit extralingüístic podríem resumir la
manera de tractar alguns mots com segueix: 'determinació',
'reflexió', 'moment lògic' són noms comuns del més ampli ús. Quan
considerem aturat el moment lògic, sense establir relacions, parlem
de *moment abstracte*. Ara aquestes determinacions es classifiquen,
d'acord amb el seu tarannà, en *simples reflexions*, en *anàlisis* i
en *síntesis*. Independentment d'aquesta classificació, *la relació*
es troba en una determinació *ad hoc* mentre que 'igualtat' i
'diferència' en són noms.

Quan els usem com a registres, llavors hi ha el corresponent
contingut lògic.

Alhora, en el cas d'estar parlant amb registres (usem o no
aquells mots) hi ha una reflexió lingüística, si veritablement
«estem ocupats en això» (pensem amb/en registres), reflexió que va
passant a d'altres reflexions, simplement; si no hi estem llavors
estem tractant afers extralingüístics.

S'observarà doncs en conjunt la importància de la donació
lògica tant en els afers extralingüístics com a l'hora de
circumscriure el material dels afers lingüístics; se subratlla a
la vegada la necessitat d'introduir una qualsevol entitat a través
de la diferència o de la corresponent posició lògica, d'una banda -
- que es converteix en una cura per la extrapolació de les entitats
lingüístiques, d'una altra. Es tracta per tant d'un *realisme* tant
per als afers no lingüístics com lingüístics, que és *lògic* perquè
qualsevol entitat està donada en la reflexió mentre que accepta i
assumeix tant el contingut extralingüístic com el propi pensament
lingüístic.

"itself") *als quals ens referiem abans), i al* mateix temps
pretengui recolzar en la percepció l'esllavissada semàntica *que ha*
estat infligida al concepte cabdal d'"auto-donació" o
"Selbstgegebenheit"», a Josep Mª Bech, *Els problemes d'identitat*
de la doctrina fenomenològica, pàgs.213-215: el treball d'aquest
autor té el mèrit d'assenyalar d'una manera quasi exhaustiva les
apories en els grans temes fenomenològics, i la seva lectura podria
servir de propedèutica del nostre propi treball per a tots els
estudiosos que provenen de les filosofies constitutives.

III

SOBRE L'ANÀLISI.

Els esbossos sobre els lligams entre lògica i llenguatge que hem ofert fins ara han de perllongar-se amb algunes consideracions sobre el paper lògic de la negació o d'altres construccions lingüístiques, tenint especial cura de la circumstància que s'ha cregut que una part important de la lògica (i de l'anàlisi) estava en estreta connexió amb unes tals operacions.

§20. Negació i afirmació. Veritat i falsedat.

1. Agafem les paraules 'no' i 'negació' (i 'si' i 'afirmació'). Una cosa com

 (1)

només admet aquells signes quan es parla. Una determinació on no hi entren mots no és ni afirmativa ni negativa.

Hom experimenta una certa repugnància a determinar (tenint present (1)) "això és blanc". Hi ha també sens dubte un fet extralingüístic -- que per se no és ni negatiu ni afirmatiu mentre s'hi usa la llengua: la incorrecció lingüística no sembla provenir del dibuix abstracte ni del registre pres abstractament, ni sembla provenir de la relació entre l'un i l'altre (en principi qualsevol forma hauria de ser correcta); l'experiència de la incorrecció prové versemblantment de l'aprenentatge, sembla un toc d'alerta de l'aprenentatge, com un error en el moviment de les cames ens alerta sobre la caminada. Podríem concloure doncs que 'fals' o s'usa com a mer registre o com un nom per a una tal experiència.

Per als altres casos tenim

(1) 'això és blanc'  (fals)

(2) 'això no és blanc'  (vertader)

(3) 'això és negre'  (vertader)

(4) 'això no és negre'  (fals)

on 'no' remetria a un afer d'aprenentatge de noms (fixem-nos que usem 'no és blanc' en (2) o que l'ús 'no és negre' en (4) és experimentat amb aversió).

A banda que tots els mots següent poden ser registres, mentre 'afirmació' sembla també un nom per a formes com 'això és blanc' (i 'negació' per a 'això no és negre'), repetim que 'veritat' i 'falsedat' semblen també noms per al «bon ús» o per al «mal ús» de les formes, per tant remeten a l'aprenentatge, i es diuen en una experiència que depèn (aquí) d'afers lingüístics i no lingüístics[1]. Després hi ha moltes maneres de fer registres lingüístics, com en l'ús de 'l'afirmació que... ', 'la veritat que...', etc., on podem forçar una ostensivitat (de l'absència de 'no' a la forma, de sentiment d'aprovació): Direu que quan volem disputar sobre la veritat i la falsedat no creiem pas estar escatint sobre els bons usos o els mals usos de les paraules, però aquí és possible que hi hagi algun equívoc en la mesura que no diferenciaríem prou el fet extralingüístic en qüestió i la nostra afecció lingüística en determinar-lo; o bé en la mesura que no diferenciéssim prou els usos plurals de 'veritat': fet i fet, si les determinacions silencioses no es diuen generalment vertaderes o falses, la llengua permet l'ús de 'vertader' per a experiències colpidores, per exemple, o no hi ha cap inconvenient que usem 'vertader' i 'veritat', com usem 'real' i 'realitat' ('és' i 'esser'), etc. Com comentem sols cal precisar l'ús que fem dels mots.

---

[1]Llavors no serien exactes en aquesta accepció les paraules de Quine quan diu que «aquesta ascensió a un pla de referència lingüístic sols és una retirada momentània del món, perquè la predicació de veritat és útil precisament per la cancel.lació de la referència lingüística. La predicació de veritat és un recordatori que, malgrat l'ascensió tècnica de parlar d'enunciats, la nostra mirada està posada en el món. La força cancel.latòria de la predicació de veritat s'explicita en el paradigma de Tarski:

'La neu és blanca' és veritat si i sols si la neu és blanca»

Les marques de citació són les que estableixen la diferència entre parlar de mots i parlar de la neu. La citació és un nom d'un enunciat que conté un nom, això és, 'la neu', de la neu. Anomenant vertader l'enunciat, anomenem blanca la neu. La predicació de veritat és una estratagema per a deixar de citar. Podem afirmar un enunciat simple amb el mer fet d'expressar-lo, per tant sense l'ajut de la citació o de la predicació de veritat; però si volem afirmar algun grup infinit d'enunciats que sols podem delimitar parlant dels enunciats, llavors es fa servir la predicació de veritat», a Philosophy of logic, pàg.12, cf.10-14. Sols l'ús d''afirmar' i de 'negar' es retreuria del món per un moment per a considerar (quan no s'usessin com a registres) el llenguatge; sobre Tarski, cf.més avall.

2. Afegim una breu consideració dels usos de 'no': estudiant

'això és blanc o no és blanc' ■

establim la incorrecció de l'ús 'blanc', però aquesta incorrecció es converteix en l'estiblement de la correcció de l'ús de 'no blanc'; a

'això és negre o no negre' ■

establim la correcció de l'ús 'negre' i la incorrecció de l'us 'no negre'; puc anar repetint el joc i en qualsevol circumstància uso un nom o un no nom: en efecte el principi de no contradicció com a tal és una generalització lingüística (§ 34) i s'exemplifica en els casos; i de manera paral.lela el principi del tercer exclòs esdevé el truisme que el joc del principi de no contradicció està entre el nom i el no-nom, simplement[2].

3. és clar que quan no usem el llenguatge d'una manera ostensiva el «bon ús» i el «mal ús» dels mots no pot trobar-se enmig de l'experiència lingüístico-ostensiva: en afirmar que «és fals que el meu germà es digui Robert» no cal que m'imagini el meu germà, i més aviat la sentència reflecteix la incorrecció de «el meu germà es diu Robert», perquè sabem que «el meu germà es diu Carles», això és perquè hi ha una saviesa lingüística -- si voleu: una conducta lingüística apresa --, i la falsació d'una altra conducta és llavors aquí el palesament d'una incorrecció sols lingüística.

Però els casos poden ser plurals: així com no cal que sempre pensi l'ús d'afirmacions i de negacions a la manera ostensiva, de fet tot allò que està après i és ja un afer lingüístic o formal sols és correcte o incorrecte en tant que correspon a allò que hem après o que no hi correspon: és fals, per exemple, que seixanta-quatre per vuit faci quatre-cents vint-i-quatre perquè fa cinc-

---

[2]Notem que la negació del principi del tercer exclòs per part de l'intuïcionisme matemàtic (Brouwer, Heyting, etc.) nega que el principi sigui vàlid, no per a un cas concret, sinó per a un pensament lingüístic (p.e. «tots els nombres reals», etc.) i, en general, per als afers matemàtics compromesos en suposats infinits actuals (cf.per exemple l'article Consciousness, philosophy, and mathematics, del primer); l'escrúpol tanmateix sembla exagerat si atenem que (1) podria traslladar-se a qualsevol indret matemàtic: qualsevol reiteració indefinida (d'una operació o d'una sèrie) esdevé un recurs lingüístic i (2) el principi essent una generalització lingüística, i.e. pensament lingüístic, no té massa cap de negar-lo per a un altre pensament lingüístic per més que de fet no pugui investigar-se en tots els casos particulars, car això equivaldria a deslegitimar el caràcter pràctic de tots els recursos lingüístics, incloses les generalitzacions, de no importa quin llenguatge.

dotze. Certament els pros i els contres d'unes tals conductes lingüístiques són els de tots els registres en conjunt: mentre cal prendre al seu ús tal qual, de vegades és possible de fer ostensiva 'ús de l'afirmació o de la negació; és més, en aqueta accepció un tal fer ostensiu és el que garenteix l'encert o el desencert del discurs; tanmateix d'altres vegades no es pot fer ostensiu, i llavors es tracta d'una conducta merament lingüística i formal, que és correcta o incorrecta, i llavors la correcció i la incorrecció remet, si tenim afanys investigadors, als motius pels quals tenim per corrrecta una tal conducta lingüística (per què, per exemple, seixanta-quatre per vuit fa cinc-cents dotze), o bé remet al nostre desig de tenir per veritat una determinada conducta («per un punt exterior a una recta passen dues paral.leles»), i en aquest darrer cas perllonguem una activitat que ja dominem prèviament, és a dir, sabem ja que el manteniment d'un enunciat comporta que no puguem mantenir alhora i en les mateixes circumstàncies el seu contradictori, etc.

No cal reduir doncs uns usos lingüístics a uns altres: el principi de no contradicció val d'una manera absoluta per als usos ostensius del llenguatge, i val d'una manera absoluta en les conductes lingüístiques, i tant en un lloc com en l'altre remet (vagament) a l'aprenentatge.

4. Certament prou filòsofs han fet un ús del mot 'veritat' a la manera com nosaltres usem el mot 'real', i -- repetim-ho -- un tal ús és del tot vàlid.

Tot i això hauríem de procurar, sembla, de no reduir tampoc uns usos del mot 'veritat' a d'altres, com per exemple fa el propi Heidegger en prendre l'ús del mot 'veritat' com a desocultació a partir dels altres usos del mot en el llenguatge, quan diu: «llavors, què s'entén d'una manera quotidiana per «veritat»? Aquest mot «veritat», il.lustre i també gastat i gairebé buit, esmenta allò que fa vertader quelcom vertader. Què és quelcom vertader? Diem, per exemple, «és un veritable goig de col.laborar a dur a terme aquest treball». Volem dir: és un goig pur, real. Allò vertader és el que és real. Per això parlem d'un or vertader a diferència del fals. L'or fals no és realment tal qual sembla. Sols és una «aparença» i per consegüent irreal. Allò irreal val com el contrari d'allò que és real. Però l'or aparent és també quelcom real. Per això diem d'una manera més clara: l'or real és l'or autèntic. «Real», tanmateix, ho són els dos, tant l'or autèntic com el no autèntic que circula. Així allò vertader de l'or autèntic ja no es pot acreditar per la seva realitat. Retorna la pregunta: què vol dir aquí autèntic i vertader? L'or autèntic és allò real la realitat del qual està d'acord amb el que esmentem «autènticament» amb or d'una manera prèvia i constant. Contràriament diem allí on suposem que l'or és fals: «aquí quelcom no concorda». A la inversa, d'allò que és «com correspon», fem observar que concorda. La cosa concorda.

Tanmateix no sols anomenem vertader un goig real, l'or autèntic i tot ens d'una tal espècie, sinó que també i sobretot anomenem vertaders o falsos els nostres enunciats sobre l'ens, el qual ens pot ser segons la seva espècie autèntic o no autèntic, en la seva realitat així o altrament. Un enunciat és vertader si el que esmenta i diu està d'acord amb la cosa sobre la qual enuncia. També diem aquí: concorda. Però ara no concorda la cosa, sinó la proposició.

Allò vertader, sigui una cosa vertadera o una proposició vertadera, és allò que concorda, allò concordant. Ser vertader i veritat signifiquen aquí concordar, i certament d'una manera doble: d'una banda l'acordança d'una cosa amb allò que s'esmenta prèviament sobre aquesta, de l'altra l'estar d'acord d'allò esmentat en l'enunciat amb la cosa»[3].

Perquè un or vertader, un goig vertader o una proposició vertadera no semblen pas una concordança entre «coses» o entre una cosa i allò que esmenta l'enunciat, car aquelles determinacions no contenen aquestes diferències. Acceptada la diferència[4], Heidegger es pregunta per la interna possibilitat d'aquest estar d'acord, per on l'enunciat ha de re-presentar, posar davant, l'ens; llavors allò vertader és allò dit, allò que es fa patent, que val com l'essència de la veritat (cf.pàgs.180-183), amb la qual cosa ens trobem en un segon ús del terme 'veritat' (deixant ara la qüestió sobre la seva ostensivitat, car sembla aquí una afecció de propòsits lingüístics: per això «és expressiva»). I les coses no van molt millor quan esmenta la no veritat com l'ocultació i com a error, car es possible que aquí es tracti cabdalment d'una determinació afectada d'una síntesi real que usa formes lingüístiques d'altres contextos (per això també «és expressiva»)[5].

5. En una direcció prou diversa Tarski també assumeix el problema de la veritat quan creu que cal trobar una definició de

---

[3]Von Wesen der Wahrheit, pàgs.176-177.

[4]Sense que sigui massa rellevant és curiós de veure que els Principia Mathematica (pàg.43) consideren la veritat d'una proposició elemental «as consisting in the fact that there is a complex corresponding to the discursive thought which is the judgment» (el subratllat és dels Principia).

[5]Remetem el lector a un proper treball nostre. Noti's que la present crítica no pretén pas de defensar que Heidegger cregués que «veritas est adaequatio rei et intellectus», sinó més aviat que arribés a circumscriure la seva noció de veritat (amb un ús pel cap baix legítim del mot 'veritat') a partir de concordances que potser són una lectura equívoca d'un altre ús del mot 'veritat', i que cregués poder passar d'uns usos als altres per un tal esclariment, quan palesament els plurals usos valen d'una manera absoluta.

veritat, això és, construir -- amb referència a un llenguatge donat -- una «<u>definició materialment adequada i formalment correcta del terme 'enunciat vertader'</u>»[6] i que caldrà per consegüent la cerca d'una colla de termes que siguin intercanviables amb 'enunciat vertader'; perquè, com a primera passa, considera el concepte de veritat en el llenguatge col.loquial a partir de la següent definició semàntica (cf.pàg.155):

> (1) un enunciat vertader és aquell que diu que l'estat dels afers és així i això, i l'estat dels afers és en efecte així i això.

que creu que més o menys reflecteix formulaciona anteriors, com la següent d'Aristòtil:

> «<u>dir del que és que no és, o del que no és que és, és fals, mentre que dir del que és que és, o del que no és que no és, és veritat</u>» (<u>Metafísica</u>, Γ,7,27).

Tarski passa doncs a donar un esquema de (1):

> (2) <u>x</u> és un enunciat vertader si i sols si <u>p</u>

on '<u>x</u>' pot ser subsituït per un nom amb marca de citació (per exemple 'neva') o per un nom descriptiu-estructural, amb el ben entès que per «nom» s'entén, en Tarski, tant les marques a la dreta i a l'esquerra com l'expressió que es troba enmig, expressió que és l'objecte denotat pels noms en qüestió, en el primer cas; que per «nom» s'entén la descripció dels mots que componen l'expressió denotada pel nom així com els signes dels quals està compost cada mot i l'ordre dels signes i dels mots -- i on '<u>p</u>' pot ser substituït per un enunciat, per exemple

> (3) 'neva' és un enunciat vertader si i sols si neva

> (4) una expressió que consta de les quatre lletres ENA, E, VE, A (en aquesta ordre), és un enunciat vertader si i sols si neva.

Però la presentació d'aquest autor sembla dificil d'admetre perquè no és versemblant que en «neva és vertader» hi hagi un altre afer particularitzat respecte de «neva» més enllà d'assumir la correció (en aquest cas sembla inevitable) de l'experiència lingüística/extralingüística, això és, de "nevar" (en el nostre ús de les cometes). En efecte podríem trobar dificultós de justificar en «neva és vertader» l'ús que fa Tarski de les marques a la dreta i a l'esquerra ('neva'), és a dir, la contraposició entre 'neva'

---

[6] <u>El concepte de veritat...</u>, pàg.152. Es guarda al llarg d'aquest punt l'ús que fa Tarski de la cometa a l'esquerra i a la dreta de l'expressió que se cita.

Tarski de les marques a la dreta i a l'esquerra ('neva'), és a dir, la contraposició entre 'neva' i neva, quan podríem creure que «neva és ~~(un enunciat)~~ vertader si i sols i neva»; car més aviat sembla que el nostre autor ha cregut que «és ~~(un enunciat)~~ vertader» es pot confrontar a «neva», això és, que la <u>predicació</u> analitza eficaçment «neva és ~~(un enunciat)~~ vertader»: jo dic «és ~~(un enunciat)~~ vertader», per tant (raonaríem) ho dic de quelcom, però no ho puc pas dir (ho suposo) de «neva» en tant que referit a la neu extralingüística, així doncs ho dic de l'enunciat; si hi ha llavors una predicació, ha d'haver-hi un enunciat. Es tracta per conseqüent d'una confusió entre una experiència lingüística/extralingüística, i una anàlisi gramatical (cf. §§ 27ss.). I d'això n'hi hauria una prova suficientment clara, perquè si «neva és ~~(un enunciat)~~ vertader» no fos quasi quelcom tautològic amb «neva», això és, si «neva és ~~(un enunciat)~~ vertader» fos l'enunciat 'neva' al qual predico gramaticalment «és un enunciat vertader», llavors «'neva' és un enunciat vertader» i «neva» no tindrien res en comú, hi hauria mera equivocitat, i no hi hauria més motius per a predicar de 'neva' «és un enunciat vertader» que un altre predicat qualsevol, com ho palesa el propi esquema (2).

En aquest punt les paraules d'Aristòtil semblen una vegada més prou útils, perquè apleguen les afirmacions i les negacions amb allò vertader i allò fals, exemplificant que l'ús de 'veritat' es contraposa ~~amb~~ al de 'falsedat', i exemplificant que aquests mots reblen els bons usos o els mals usos dels mots. Nosaltres més aviat usem 'veritat' quan se'ns suggereix ~~la~~ negació (~~quan afirmem~~) o l'afirmació (~~quan neguem~~), o la usem emfàticament («és veritat que neva»); de fet no sembla possible de capir (en aquesta accepció) l'ús del mot 'veritat' al marge de l'ús del mot 'falsedat', i a l'inrevés.

Tarski tanmateix es demana si és possible de generalitzar expressions del tipus (3), i proposa l'estudi de

> (5) Per a tot <u>p</u>, '<u>p</u>' és un enunciat vertader si i sols si <u>p</u>

que cal millorar perquè a l'expressió '<u>x</u> és un enunciat vertader' les úniques substitucions per '<u>x</u>' han de ser noms amb marca de citació, i per tant proposa

> (6) Per a tot <u>x</u>, <u>x</u> és un enunciat vertader si i sols si, per a un cert <u>p</u>, <u>x</u> és idèntic a '<u>p</u>' i <u>p</u>

però una tal generalització és enganyadora, afegeix, car el nom amb marca de citació és un nom que fa de constant individual d'una expressió definida: malgrat tot sembla que es podria replicar a Tarski que això no és un problema del llenguatge col.loquial, sinó de la interpretació i que no es veu massa bé que els noms amb marques de citació no puguin ser tractats aquí com (seguint el vocabulari de Tarski) els enunciats. Després prova si, en (6), les marques de citació poden ser functors, l'argument dels quals és una variable enunciativa i els valors noms amb marca de citació d'enunciats, però creu que aquest procediment no evita l'antinòmia del mentider. En efecte creu molt difícil de construir una definició semàntica de l'expressió «enunciat vertader» en harmonia amb les lleis de la lògica per als usos del llenguatge col.loquial, i la prova més fefaent es troba que la seva universalitat permet antinòmies com la del mentider.

Fins aquí diferiríem de Tarski en l'ús del mot 'veritat' en el llenguatge quotidià segons (2), (3) i (4), i a (5) i (6) introdueix problemes que no es derivarien del llenguatge quotidià (per a la funció, cf. §§ 27ss.). Preguem ara la paradoxa del mentider; Tarski, seguint J.Łukasiewicz, creu que es pot formular així: sigui 'c' l'abreujament tipogràfic de 'l'enunciat imprès en aquest full, línia setzena des de dalt'. Si tenim

c no és un enunciat vertader

llavors

(α) '*c* no és un enunciat vertader' és idèntic a *c*.

Seguint un esquema com (2)

(β) '*c* no és un enunciat vertader' és un enunciat vertader si i sols si *c* no és un enunciat vertader.

I les dues premisses (α) i (β) fan

c és un enunciat vertader si i sols si *c* no és un enunciat vertader.

Però (α) no sembla un tractament del llenguatge col.loquial (nosaltres no usem indistintament *no és veritat que neva* i *neva*, per exemple). D'altra banda en la dita d'Epimènides el Cretenc que «tots els cretencs són mentiders» sols quan es cregués que «tots» vol dir sense cap excepció fins i tot dels cretencs que no coneguéssim, que «són mentiders» vol dir que sempre, sense defallir, diuen mentides, i que es reflexionés sobre el cretenc que ho diu, fórem capaços de trobar-nos davant d'una contradicció[8];

---

[8]Cal reconèixer que les tradicions conceptualistes i logicistes, fins i tot no volgudes, han pesat molt a l'hora de l'assaig filosòfic de prou investigadors provinents del camp de la lògica formal, i potser no és exagerat de dir que moltíssims dels problemes de la «filosofia de la ciència» són qüestions que tenen un origen en una mala interpretació. Les dificultats dels homes formats en el camp lògico-formal per retrobar el camí ordinari semblen ~~extraordinàries~~ enormes: llegeixi's per exemple les paraules finals (pàgs.443-444) del treball Models and reality d'Hilary Putnam, que parteix de la paradoxa de Löwenheim-Skolem (i que torna a posar

però això no seria un problema del llenguatge col.loquial, sinó de la nostra <u>interpretació</u> i cal reconèixer potser que el llenguatge quotidià fa més aviat quelcom que s'apropa més a la teoria dels tipus. El llenguatge col.loquial pot permetre, és cert, el joc paradoxal, però només que un hom no extrapolés massa el valor lògic de les generalitzacions ja no hi hauria paradoxa[9]. De manera semblant «estic mentint» sols sembla possible en els diàlegs de cada dia si hi ha hagut alguna sentència abans, car 'mentir' com 'fals' es diuen de les expressions[10]: quan no s'hi ha avantposat res, l'oient sols té un «estic mentint», per això preguntarà què havia dit abans perquè, sense res avantposat, esdevé semblant a la sil.laba d'un mot polisil.lab: fet i fet sembla que hom s'adoni que hi ha una certa contorsió lingüística en l'estudi de les conseqüències d'aplicar sobre «estic mentint», «estic mentint».

---

sobre la taula que no és possible una totalitat).

[9]Se'ns permetrà de fer algunes comentaris d'una manera distesa i a tall d'hipòtesi: és possible que una investigació detallada de la història de les paradoxes contemporànies (i en l'aspecte conceptual també de les antigues) duqués a admetre que hi hagué una complicitat entre els més cars dels conceptualismes i els més crus dels constructionismes formals. D'una banda es fa difícil de no creure que Frege s'agafà tan seriosament la paradoxa de Russell (cf. § 31) perquè el concepte definit hauria de valer incondicionalment: la paradoxa forçava una rectificació ideogràfica (la teoria dels tipus representa doncs una rectificació).Però des d'una perspectiva molt més verbalista i prou pragmàtica el valor d'un argument no vindria necessàriament circumscrit per la predicació, per tant la paradoxa no seria un cercle viciós, sinó un genuí problema lògico-filosòfic (el lector recordarà per exemple la rèplica de Quine a Poincaré en els primers fulls de la <u>Set theory and its logic</u>). Això és, la pul.lulació de paradoxes podria semblar una conseqüència d'un supòsit conceptualista incondicional o d'un construccionisme que fundaria un llenguatge: però veurem repetidament, tant per als llenguatge col.loquials com per a les disciplines matemàtiques, que les fórmules generals també s'haurien d'explicar a partir d'<u>allò que hem après</u>, i que una geometria com la de Lobatxevski (per tal d'esmentar quelcom que inclou une fundació) suposa un aprenentatge per tal de fer-ne variants.

[10]Schröder afegeix: «<u>aquest enunciat de fet no és per tant ni vertader ni fals: es tracta d'un enunciat</u> sense sentit <u>en la mida que es refereix a un sentit, que pressuposa conegut, que ell mateix hauria prèviament de lliurar, d'aclarir, però que pot fer impossible de reconèixer. A més que l'enunciat s'adjudica aquí per necessitats intel.lectuals a l'únic enunciat. -- De la mateixa manera no tindria sentit l altre enunciat (pres d'una manera aïllada): "estic dient la veritat amb aquestes paraules"</u>», <u>Vorlesungen</u> vol.II, pàg.7.

Podríem potser resumir de la següent manera: (1) 'veritat' i 'falsedat' són noms que afegim en les determinacions pel bon ús o el mal ús que hi ha en les expressions, d'aquí que no sembla exacte que «neva» i que «és veritat que neva» siguin determinacions d'ordre divers, corresponguin a llenguatges diversos. (2) El millor esquema i generalització dels usos del mot 'veritat' continua essent el que es deriva de les paraules d'Aristòtil: dir de _p_, _p_ i de no-_p_, no-_p_, és veritat; dir de _p_, no-_p_, i de no-_p_, _p_, és fals. (3) El llenguatge col.loquial no és massa procliu a les paradoxe~~s~~, malgrat que pot oferir ambigüitats~~, que no naixerien necessàriament del llenguatge, que seria neutre, sinó dels seus usos~~.

és cert que el treball de Tarski vol estudiar cabdalment el concepte de veritat en els llenguatges formalitzats, i que troba que és possible per a llenguatges formalitzats d'ordre finit, però ho deixarem estar aquí per amor de la brevetat: de fet l'autor parteix de l'acceptació de (2) alhora que una investigació detallada ens faria veure potser que hi ha una confusió entre la descripció ortogràfica dels enunciats i llur significació.

§21. De la iteració de les connectives.

L'experiència rebla que allí on uso mots la confirmació de l'afirmatiu comporta de fet la desconfirmació del negatiu, i la del negatiu la de l'afirmatiu: la falsedat i la veritat depenen, sembla, de l'aprenentatge. Alhora el domini de la llengua col.loquial també permet l'assumpció d'una qualsevol anotació formal: si em diuen que no es referien a cap home sé que és fals que es referissin a un home (tot plegat no passant de registres), però també sé que si 'A' és cert, la seva negació és falsa. Ara bé una determinació del tipus «si A, llavors negació d'A és fals» no hauria de ser tinguda com una construcció de joc reglat formalment, com no ho hauria de ser els seus paral.leles qualssevol en registres del llenguatge ordinari, com sigui que aquelles determinacions no són començament, sinó resultants, això és, no s'avalen per la mera forma, sinó que són la conseqüència del domini de la llengua o són la resultant de generalitzar els seus usos. La diferència és subtil i no l'acabarem de copsar fins que hàgim estudiat la generalització dels llenguatges col.loquials i hàgim tractat també la generalització en les disciplines matemàtiques. Ho podríem doncs resumir així: una cosa és l'anotació formal dels nostres hàbits, una segona la construcció d'un joc formal, cosa que equival potser a dir que acceptem les primeres a partir dels usos del llenguatge, i no pas a l'inrevés.

Paral.lelament els usos de la conjunció com a registres dels llenguatges quotidians palesen llur domini i la introducció d'una nova anotació formal pot ser la resultant generalitzada d'uns tals hàbits, essent aquells registres i aquestes anotacions prou útils.

Tot i això pot haver-hi motius per a pensar que la insistència en el descabdellament de les combinacions dels usos de negacions i de conjuncions les converteix irremeiablement en un joc no massa interessant. Però ens hem d'entendre perfectament: no hi ha en nosaltres una crítica de l'ús de la negació o de la conjunció com a operacions lògiques perquè siguin <u>un error</u>: els jocs de l'ús de la negació i de la conjunció no són en principi cap error, sinó que més aviat esdevenen, com diem, <u>coses no interessants</u>. Perquè d'una banda és comprensible que el paral.lelisme entre l'ús de l'afirmació i de la negació amb els seus valors de veritat i de la conjunció amb els seus valors de veritat <u>respecte</u> dels nostres registres lingüístics esperonés amb entusiame la creença que la combinació de l'ús de la negació i de la conjunció «marqués» (no sabem si aquesta seria la paraula justa) les possibilitats lògiques. I això és cert des d'un punt de vista: és a dir, des del punt de vista de les certeses dels nostres registre, per exemple quan diem que «la veritat de l'afirmació comporta la falsedat de la negació» o que «si és fals A i si és fals B, el tot A i B és fals», i de fet el desplegament de les possibilitats de l'ús de la negació i de la conjunció no és res més que el desplegament d'aquesta certesa, fins i tot malgrat que hi hagi una tendència clara en prou lògics a definir aquesta operacions.

El problema pel qual tot això no esdevé massa interessant es troba doncs en la circumstància que «ja sabem» com a registre les possibilitats de l'ús de la negació i de la conjunció, i que no ens interessa tant quantes vegades podem negar quelcom o quantes vegades podem repetir quelcom o quantes vegades podem conjuntar quelcom fent abstracció d'allò que conjuntem, com el positiu fet de treballar un contingut, que alhora és l'únic capaç de legitimar l'afirmació i la negació lingüística, i la veritat i la falsedat. En d'altres paraules: el desplegament de possibilitats lingüístiques de la negació i de la conjunció és una lògica, però és la lògica d'aquestes possibilitats lingüístiques, i creiem prou més interessant la lògica d'allò pel qual, per exemple, admetem registres del tipus «si és fals A i si és fals B, el tot A i B és fals» o «la veritat de l'afirmació comporta la falsedat de la negació»: perquè sabem que els nostres usos de la negació i de la conjunció, de la veritat i de la falsedat, no valen tant per la seva reiteració lingüística amb una anotació formal nova, com per allò on entren en el desplegament lògic.

Respecte del condicional observi's que el seu ús com a registre i la creació de noves anotacions formals són més aviat resultants, amb l'afegit que els usos del condicional són prou varis d'acord precisament amb la relació de l'antecedent i el conseqüent, les finalitats del parlant, els motius que té, els implícits de la situació, etc. Tot i així no hi ha cap dificultat de dissenyar una nova anotació formal generalitzadora com a resultant: el punt més aviat es troba en la insistència en l'originalitat d'una implicació de formes i el seu descabdellament en combinacions, fets que l'allunyarien dels valors inherents d'una formulació general i l'establirien com a joc, alhora que la condicionalització deixaria de ser un recurs lingüístic.

Repassem aquest text de Frege: «Per tant una estructura hipotètica de pensament és vertadera quan el conseqüent és vertader. També una estructra hipotètica de pensament és vertadera quan la condició és falsa: tant és que el conseqüent sigui vertader com fals. És clar que el conseqüent ha de ser sempre un pensament. Siguin "$\mathcal{A}$" i "$\mathcal{B}$" una altra vegada genuïnes proposicions, llavors tenim en

"no ((no $\mathcal{A}$) i $\mathcal{B}$)"

l'expressió d'una estructura hipotètica, el consegüent del qual és el sentit (el contingut del pensament) de "A", i la condició del qual és el sentit de "B". Podem escriure amb aquest fi

"Si B , llavors A ".

Per descomptat poden brollar aquí alguns escrúpols. Hom trobarà potser que amb això no s'interpreta l'ús lingüístic. Malgrat tot cal de bell nou accentuar sempre que s'ha de permetre que la ciència tingui el seu propi ús lingüístic, i que no sempre es pot sotmetre al llenguatge quotidià. Fins i tot crec que la dificultat més gran de la filosofia està en el fet que té a disposició un instrument poc apropiat per al seu treball, és a dir el llenguatge quotidià, per al domini del qual hi han intervingut, determinant-lo conjuntament, unes necessitats que no són les de la filosofia. Per això la lògica està obligada primerament a agençar-se com cal un instrument útil a partir d'allò que té a disposició»[14]. Després (§ 23) tindrem ocasió de rellegir el joc condicional en l'autor; cal defensar, certament, el dret inqüestionable de tota ciència a tenir el seu propi llenguatge, però sembla que la ciència hauria de ser la primera d'evitar uns possibles equívocs amb d'altres llenguatges. Però Frege escriu a continuació: «També el pensament expressat en l'estructura proposicional

"Si tinc un gall que avui ha post ous, demà de matí s'ensorrarà la catedral de Colònia"

és vertader. "Però la condició i el consegüent no tenen aquí cap connexió interna", dirà potser algú. Ara bé, no he exigit pas una tal connexió en el meu esclariment i sols demano de comprendre en "Si B , llavors A" el que he dit i expressat en la forma

"no ((no A) i B)"

Per descomptat aquesta manera d'entendre una estructura proposicional hipotètica causarà primerament estranyesa. Però el meu esclariment no pretén d'interpretar l'ús lingüístic quotidià, que és en la majoria dels casos imprecís i vacil.lant per a les finalitats de la lògica. Fet i fet s'agombolen en el primer afers de tota mena, per exemple la relació de causa i efecte, la intenció amb la qual el parlant expressa una proposició de la forma "Si B , llavors A ", el fonament pel qual té el seu contingut per vertader. El parlant fa potser indicacions a propòsit de preguntes que el qui escolta tal vegada ha formulat, indicacions que pertanyen a fets accessoris que s'entortolliguen sovint als pensaments en el llenguatge quotidià. Tanmateix la meva feina és aquí de destriar una estructura de dos pensaments, el nucli lògic,

[14]Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge, pàgs.82-83.

mitjançant la separació dels fets accessoris, estructura que he anomenat estructura hipotètica del pensament. La comprensió del fet de construir pensaments estructurats a partir de dos pensaments ha de constituir certament la base per a la consideració dels pensaments múltiplement estructurats»[12]. Hi hauria, sembla, una rectificació, potser discutible, del llenguatge quotidià: la tasca aquí és «de destriar una estructura de dos pensaments, el nucli lògic, mitjançant la separació dels fets accessoris»!

En efecte en el cas de l'ús del condicional (i de la disjunció) l'afer és un pèl més greu que en el del de la negació i de la conjunció perquè es tendeix a una fundació d'aquelles operacions, fundació autònoma respecte dels usos del condicional i de la disjunció dels llenguatges naturals i de la ciència. Car hi ha un factor que sembla no deixar dubte que es tracta aquí d'un construccionisme, i és el fet que un hom creu que els usos del condicional (i de la disjunció) valen el que val la seva taula de veritat, quan això sembla pressuposar una certa distorsió del valor lingüístic de, per exemple, «si véns anirem al cinema» o de «si a = 0, llavors a és igual a zero», l'encert lingüístic dels quals no passaria tant pels valors de veritat dels seus elements com per la significació lingüística per als parlants o pel contingut lògic d'allò que s'hi tracta, cosa que faria del condicional un recurs polisèmic sense llevar-li mai la seva eficàcia social i expositiva.

En conjunt doncs tendim a creure, en la mesura que es despleguen les possibilitats dels usos de la negació i de la conjunció, i que hi ha uns retocs fins i tot per a la condicionalització i la disjunció lingüístiques, que les operacions lògiques tenen una forta propensió a esdevenir jocs autònoms, amb les seves pròpies regles, afer que els va allunyant dels usos de la negació, de la conjunció, de la disjunció i del condicional dels llenguatges col.loquials i de les ciències.

Per tant sembla haver-hi una malcomprensió bàsica de la lògica que esdevé sempre versemblant perquè de fet hi ha una clara consciència de seguir o de retocar allò que hem après lingüísticament.

---

[12] Ibidem, pàg.84.

§ 22. El constructivisme de les operacions. L'intercanvi definicional. Les taules de veritat.

Tot això basta per a il.lustrar, sembla, que allò que anomenem el construccionisme de les operacions consta d'una sèrie de jocs, i per a veure que els elements que es consideren els són prou comuns. Fent ara -- i precisament per mor d'un tal constructivisme operatiu -- de 'conjunció', de 'condicional' i de 'negació' noms per a jocs tenim:

"$(\alpha \wedge \beta)$"

$\alpha(V)$, $\beta(V)$	$(\alpha \wedge \beta)(V)$
$\bar{\alpha}(F)$, $\beta(V)$	$(\bar{\alpha} \wedge \beta)(F)$
$\bar{\alpha}(F)$, $\bar{\beta}(F)$	$(\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta})(F)$
$\alpha(V)$, $\bar{\beta}(F)$	$(\alpha \wedge \bar{\beta})(F)$

"$(\alpha -> \beta)$"

$\alpha(V)$, $\beta(V)$	$(\alpha -> \beta)(V)$
$\bar{\alpha}(F)$, $\bar{\beta}(V)$	$(\bar{\alpha} -> \bar{\beta})(V)$
$\bar{\alpha}(F)$, $\bar{\beta}(F)$	$(\bar{\alpha} -> \bar{\beta})(V)$
$\alpha(V)$, $\bar{\beta}(F)$	$(\alpha -> \bar{\beta})(F)$

"$-\alpha$"

$\alpha(V)$	$-\alpha(F)$
$\bar{\alpha}(F)$	$-\bar{\alpha}(V)$

Llavors sembla comprensible que hi hagi una peculiar manera de passar als altres jocs de les estructures a partir del joc d'una estructura i a partir de la negació. Valgui el cas que arrenquem des del joc negatiu

$P(V)$	$-P(F)$
$\bar{P}(F)$	$-\bar{P}(V)$

i que ara prenguem el joc de nom '(−P Q)', que és

$P(V)$	$-P(F)$	$Q(V)$	$(-P \wedge Q)(F)$
$P(F)$	$-\bar{P}(V)$	$\bar{Q}(V)$	$(-\bar{P} \wedge \bar{Q})(V)$
$\bar{P}(V)$	$-\bar{P}(F)$	$\bar{Q}(F)$	$(-\bar{P} \wedge Q)(F)$
$\bar{P}(F)$	$-\bar{P}(V)$	$\bar{Q}(F)$	$(-\bar{P} \wedge Q)(F)$

on −P treballa <u>com si</u> fos una lletra. Podem afegir encara un altre joc a la resultant: el de la negació, i.e. el joc de nom '$-(-P \wedge Q)$', i tenim

$P(V)$	$-P(F)$	$Q(V)$	$(-P \wedge Q)(F)$	$-(-P\ \ Q)(V)$
$P(F)$	$-P(V)$	$Q(V)$	$(-\bar{P} \wedge \bar{Q})(V)$	$-(-P\ \ \bar{Q})(F)$
$\bar{P}(V)$	$-P(F)$	$Q(F)$	$(-\bar{P} \wedge \bar{Q})(F)$	$-(-\bar{P}\ \ \bar{Q})(V)$
$\bar{P}(F)$	$-P(V)$	$Q(F)$	$(-\bar{P} \wedge \bar{Q})(F)$	$-(-\bar{P}\ \ \bar{Q})(V)$

Havent estat definit el joc de nom '(Q->P)' per

Q(V)	P(V)	(Q->P)(V)
Q(V)	P(F)	(Q->P)(F)
Q(F)	P(V)	(Q->P)(V)
Q(F)	P(F)	(Q->P)(V)

el joc de nom '-(-P ∧ Q)' té un paral.lelisme amb el de '(Q->P)' quan considerem les associacions entre Q i V/F, i entre P i V/F. Direm potser que hem «deduït» l'estructura del condicional a partir de la conjunció i la negació, perquè sols ens interessa la lletra associada a les parts elementals, les parts elementals i la lletra associada al conjunt més gran, però sembla més aviat que aquí hi ha hagut una ampliació sintètica dels jocs, un amuntegament d'anotacions, que no es podria entendre com a deducció, si per deducció s'hi comprengués que no hi ha augment sintètic.

Alhora podríem partir del joc condicional que té per nom '(P->Q)' i de la negació i «deduir» la conjunció: si

P(V),Q(V),-Q(F)	(P->-Q)(F)	-(P->Q)(V)
P(F),Q(F),-Q(V)	(P->-Q)(V)	-(P->Q)(F)
P(F),Q(V),-Q(F)	(P->-Q)(V)	-(P->Q)(F)
P(V),Q(F),-Q(V)	(P->-Q)(V)	-(P->Q)(F)

per al joc de nom '(P Q)' tenim

P(V),Q(V),	(P ∧ Q)(V)
P(F),Q(F),	(P ∧ Q)(F)
P(F),Q(V)	(P ∧ Q)(F)
P(V),Q(F),	(P ∧ Q)(F)

Observem que les associacions de lletres (P,Q, etc.) amb V i F estan associades talment que s'escau el següent

P(V), Q(V)   -(P->-Q)(V)   (P ∧ Q)(V)

i qualsevol altra combinació dels valors de veritat amb les lletres fa que associem F a les fórmules complexes. Veiem que aquesta «deducció» no sembla mantenir un mateix valor sintètic per al joc de nom '(P∧Q)' i per al de nom '-(P->-Q)'[13].

---

[13]Des de qualsevol de les «estructures de pensament matemàtic» més, en general, la negació es podrien «deduir» les altres d'una manera paral.lela als dos exemples exposats. Tanmateix no sembla exacte que l'afegiment de joc es faci sense augmentar l'abast de la síntesi d'anotacions. Per a les estructures en Frege, cf. Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefuge, on les esmentades estructures són: (1) A i B; (2) no(A i B); (3) no-A i no-B [o ni A ni B]; (4) no(no-A i no-B) [o A o B]; (5) no-A i B; (6) no(no-A i B) [o si B llavors A], totes «deduïdes» aquí de la

Nosaltres associant valors de veritat a una fórmula complexa a partir dels valors de veritat adjudicats a les lletres enunciatives, ens és indiferent d'usar el nom '-(P->-Q)' o el nom '(P ∧ Q)', el nom '(P->Q)' o el nom '-(-Q ∧ P)'. Tanmateix semblaria que ni els noms són iguals ni són iguals els jocs que s'hi determinen, malgrat que ho són els valors de veritat associats a les lletres i a les fórmules complexes[14].

Per consegüent les taules de veritat parteixen de les associacions dels valors de veritat de les lletres per tal de remuntar cap al valor de veritat associat a una fórmula complexa, talment que el conjunt de totes les associacions de valors de veritat amb la fórmula és allò que determina aquesta fórmula. '(P->Q)->C' és un nom per a

P,	Q,	C	(P->Q)->C
V	V	V	V VV VV
V	V	F	V VV FF
V	F	V	V FF VV
V	F	F	V FF VF
F	V	V	F VV VV
F	V	F	F VV FF
F	F	V	F VF VV
F	F	F	F VF FF

primera i de la negació. De fet tanmateix és una qüestió tractada per tots els lògics que segueixen unes tals construccions (cf.bibliografia).

[14]El recurs de substituir uns noms per uns altres noms d'acord amb la igualtat dels valors de veritat associats a lletres i a fórmules més complexes -- lletres, fórmules i valors que entren al joc que té aquell nom -- esdevé d'ús universal en aquestes concepcions lògiques que tractem. Tota la regla fregeriana del «canvi» (Wendung), per exemple, no n'és més que un cas (cf.Grundgesetze §§ 15ss, 48ss, etc.).

§ 13. De les inferències i de les conseqüències.

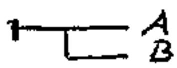
Reculem per tal d'estudiar còmodament amb una mica més de detall què cal entendre per conclusió i prendrem de model el conegut text del condicional en la Begriffsschrift fregeriana. Es tracta del condicional filònic: «Quan *A* i *B* signifiquen continguts judicables, hi ha les següents quatre ~~s~~ possibilitats:

1) s'afirma *A* i s'afirma *B*
2) s'afirma *A* i ~~s'afirma~~ *B* es nega
3) es nega *A* i ~~es nega~~ *B* s'afirma
4) es nega *A* i es nega *B* .

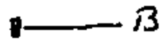
significa ara el judici que no té lloc la tercera d'aquestes possibilitats, sinó una de les altres tres. Per conseqüent quan es nega

això vol dir que té lloc la tercera possibilitat, per tant que es nega *A* i s'afirma *B* »(§5)[15].

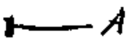
El traç vertical en l'acabament de la ratlla vol dir que s'afirma el contingut, seguint llavors que «des dels dos judicis



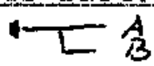
i



se segueix un nou judici



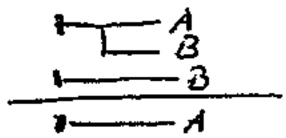
Dels quatre casos especificats dalt,



exclou el tercer,

el segon i el quart, de tal manera que sols queda el primer.

Es podria escriure aquesta conclusió així:



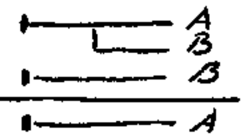
»(§6)

---

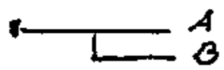
[15] ~~Mantenim doncs~~ Notis la manera de parlar de Frege que s'expressa dient que «s'afirma", "es nega", "té lloc" ~~que tingui lloc o que es nega que tingui lloc~~». A Grundgesetze § 12, ben estintolada la doctrina de la significació, el joc condicional es basa en els valors de veritat dels termes superior i inferior, i en els valors de veritat de tota la funció condicional.

Per tant, com diu el text, la introducció de l'afirmació de <u>B</u> exclou la segona i la quarta possibilitat de les ofertes en el primer text (la tercera s'exclou per l'afirmació del condicional).

En d'altres paraules: primer definim un joc (text primer) sobre quatre possibilitats a excloure'n una (que entra en el joc doncs) -- de fet cada possibilitat és més d'una determinació --, i amb la introducció de <u>B</u> en seleccionem una. El <u>modus ponens</u> llavors esdevindria el fet d'agafar una jugada de les definides, i <u>la deducció seria aquí la selecció del ja definit</u>: quan s'afirmés que aquí hi ha una anàlisi s'estaria dient que hi ha una selecció. I quan hom s'afigurés això d'acord amb



hom usaria aquí



com a nom d'un joc (amb l'hàbit adquirit el <u>modus ponens</u> esdevindria ~~un aprenentatge formal del nom,~~ un nou registre lingüístic).

Frege considerava aquesta manera de concloure com l'única necessària (cf. el pròleg de la <u>Begriffsschrift</u>, i el § 14 de les <u>Grundgesetze</u>), per més que n'acceptà d'altres a fi d'abreujar el càlcul; en efecte moltes de les contingudes en les <u>Grundgesetze</u> s'han d'entendre com a anàlisis que simplifiquen un joc prèviament definit, feta excepció de la permuta de membres que fan de condició (es tracta d'una alteració de joc, per més que conserva els valors de veritat globals) i de la ja citada <u>Wendung</u> (de "<u>A</u>-><u>B</u>" es passa a "-<u>B</u>->-<u>A</u>", on els jocs no són pas iguals, tot i que ho siguin els valors de veritat associats a les lletres i al conjunt de signes). Per consegüent l'«anàlisi lògica» no podria aquí ser pensada sols com una simplificació.

Alhora el lector podrà anar reblant pel seu propi compte les notes sobre el construccionisme que ja repetírem en diversos llocs: el <u>modus ponens</u> és un aspecte de la presentació del condicional per regles. Obse/vi's que l'exposició de totes les possibilitats /r formals possibles entre les lletres i els valors de veritat és ja un senyal d'artificiositat, mentre que reflecteixen ~~en un paral·lel formal~~ prou maneres d'usar-lo en els llenguatges de cada dia. En aquesta accepció el <u>modus ponens</u> recolliria en la regla ~~formal~~ una relació d'antecedend i de consegüent més o menys assumida, això és, reflectiria a través d'un joc artificiós un dels usos quotidians del condicional: que quelcom és la conseqüència d'alguna cosa.

§ 24. De les lleis lògiques . La tautologia.

Les lògiques que defineixen les regles de les operacions (que cal no confondre amb les lògiques formals en conjunt) farien tautologies, sembla, en la mesura que es repeteix una situació lògica i es relaciona la repetició amb el repetit (§ 2); això és, un hom diu que fa la mateixa lògica la repetició de

$\underline{B}(V)$, $\underline{A}(V)$ té lloc

quan ho ha establert en el condicional, ara per la repetició ho escull i relaciona aquest segon cas i el primer: la tautologia seria buida de sentit en l'accepció que hi ha la identitat d'una cosa amb si mateixa.

Amb l'ús d'una lletra igual (i seguint l'exemple del condicional) el joc fa

$\underline{B}(V)$	i	$\underline{B}(V)$	té lloc
$\underline{B}(V)$	i	$\underline{B}(F)$	té lloc
$\underline{B}(F)$	i	$\underline{B}(V)$	no té lloc
$\underline{B}(F)$	i	$\underline{B}(F)$	té lloc

Però, per la convenció de la lletra igual, tant la segona possibilitat com la tercera falten, i ens queden les possibilitats primera i quarta que, per tant, es tornen a determinar com les mateixes d'abans: si afegeixo V a $\underline{B}$, ens trobem a la primera possibilitat del joc del condicional; si afegeixo F a $\underline{B}$, ens trobem a la quarta possibilitat del joc del condicional; en ambdos casos repetim el joc determinat: i les dues possibilitats pertanyen al joc del condicional. Hi ha doncs una tautologia entre una primera possibilitat i les associacions de V amb $\underline{B}$ i entre una quarta possibilitat i les associacions de F amb $\underline{B}$.

És obvi que, en aquests contextos, la repetició (i la relació) de quelcom ja establert es troba plasmada en el paper escrit (hi ha igualtat de repetit i repetició); per això l'ús del mot 'tautologia' es pot entendre aquí tant per a la igualtat d'una cosa amb si mateixa com per la igualtat entre dues coses.

I en qualsevol circumstància la complicació tautològica dependrà, sembla obvi, d'allò que es fixés. Per exemple en la següent «proposició» (Frege)

tindríem un nom per a

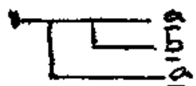
c(V)	b(V)	a(V)	té lloc
c(V)	b(F)	a(F)	té lloc
c(V)	b(F)	a(V)	té lloc
c(F)	b(V)	a(V)	té lloc
c(F)	b(V)	a(F)	té lloc
c(F)	b(F)	a(V)	té lloc
c(F)	b(F)	a(F)	té lloc
c(V)	b(V)	a(F)	no té lloc

o per a alguna de les línies primeres. Si es tractés, però, de

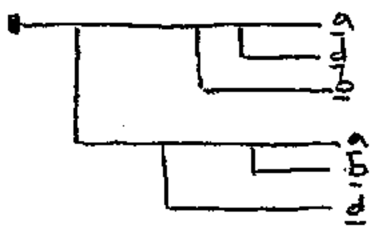
fóra un nom per a

a(V)	b(V)	a(V)	té lloc
a( )	b( )	a( )	té lloc
a(V)	b(F)	a(V)	té lloc
a( )	b( )	a( )	té lloc
a(F)	b(V)	a(F)	té lloc
a( )	b( )	a( )	té lloc
a(F)	b(F)	a(F)	té lloc
a( )	b( )	a( )	no té lloc

on es prescindiria de la segona, quarta, sisena línies i la línia d'exclusió ~~(es decidiria així en principi l'adjudicació de veritats i falsedats podria ser una associació arbitrària)~~. Llavors s'hauria fet una selecció del joc, talment que sols romandrien combinacions que no s'excloguessin, que fessin viable l'afirmació del condicional. Per tant aquesta «llei analítica» sembla sols una selecció del joc definit, i en aquesta accepció hi hauria una tautologia entre les línies seleccionades i les línies que defineixen el joc. Que la fórmula



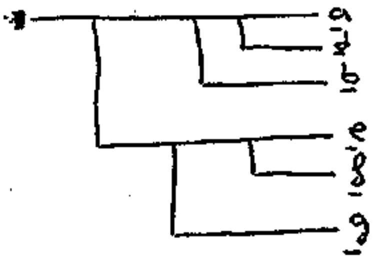
sigui una llei analítica es deuria al fet que és una selecció de les regles de joc. Així mateix



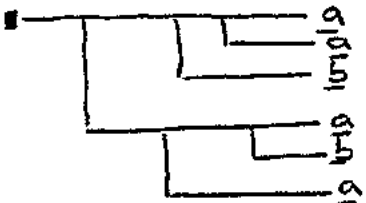
tornaria a ser un nom per a

d(V)	b(V)	a(V)	b(V)	d(V)	a(V)
d(F)	b(V)	a(V)	b(V)	d(F)	a(V)
d(V)	b(F)	a(V)	b(F)	d(V)	a(V)
d(V)	b(V)	a(F)	b(V)	d(V)	a(F)
d(V)	b(F)	a(F)	b(F)	d(V)	a(F)
d(F)	b(F)	a(V)	b(F)	d(F)	a(V)
d(F)	b(V)	a(F)	b(V)	d(F)	a(F)
d(F)	b(F)	a(F)	b(F)	d(F)	a(F)

que és una selecció del joc que té per nom, per exemple,



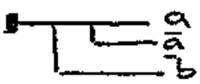
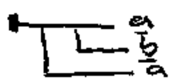
i aquella llei analítica seria una selecció d'un joc que sols conté línies que inclouen el 'tenen lloc'. Ara podríem fer una nova selecció gràcies a reduir encara més el nombre de lletres, talment que tinguem la fórmula



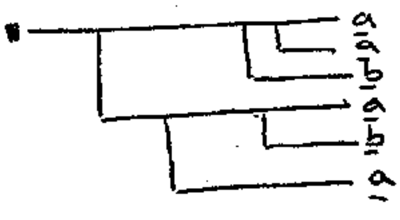
que seria un nom ~~ara~~ sols per a quatre línies de les vuit anteriors, i.e.

a(V)	b(V)	a(V)	b(V)	a(V)	a(V)
a( )	b( )	a( )	b( )	a( )	a( )
a(V)	b(F)	a(V)	b(F)	a(V)	a(V)
a( )	b( )	a( )	b( )	a( )	a( )
a( )	b( )	a( )	b( )	a( )	a( )
a( )	b( )	a( )	b( )	a( )	a( )
a(F)	b(V)	a(F)	b(V)	a(F)	a(F)
a(F)	b(F)	a(F)	b(F)	a(F)	a(F)

i la nova llei analítica seria una nova selecció. Però fixem-nos que l'actual selecció ja només juga amb una de les quatre possibilitats de l'últim condicional, això és, aquella per la qual

s'afirma  i s'afirma 

essent tant una fórmula com l'altra noms per a seleccions de jocs que inclouen el 'tenen lloc'; en aquest cas el <u>modus ponens</u> entre



i 

fa 

té l'aparença d'una nova llei deduïda, però no seria res més que la tautologia d'allò que ja s'hauria seleccionat. En d'altres paraules: totes aquestes lleis analítiques semblen sols seleccions de línies a partir dels jocs definits[16].

I de bell nou cal dir que l'ús de la tautologia en les lògiques que reglen les operacions no sembla més que un ús particular de la tautologia en no importa quina lògica (hi hauria tautologia en les dues determinacions d'un mateix home)[17].

---

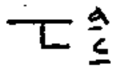
[16]Totes les lleis fonamentals o axiomes lògics semblen doncs tautologies en la <u>nostra</u> accepció, i.e. repeteixen allò ja circumscrit. Una llei lògica que usés un condicional -- com els exemples presentats aquí -- esdevindria a més una selecció. Quan no usés condicionals, com en el cas de l'axioma de la identitat, es tractaria sols d'una tautologia (malgrat que en Frege aquell axioma no sembla exempt d'una certa ambigüitat). Fins i tot el cinquè axioma de les <u>Grundgesetze</u> (cf.més avall § 30 punt 1) <u>podria</u> ser tingut com una simple tautologia. D'altra banda el nombre de lleis fonamentals (axiomes, hipòtesis, etc.) seria reduït pel fet que hi aplicaríem el principi de substitució (cf. § 25); d'aquí que hi pugui haver un marge relativament ampli de tria de principis, que brolla a partir de feixugues <u>experiències</u> de substitució. Observi's també que el fet d'entendre la tautologia com a repetició compromet la <u>necessitat</u> lògico-formal.

[17]Però l'ús que fan les lògiques ~~formals~~ (que construïxen les regles de joc de les operacions) del mot 'tautologia' no sembla implicar pas una certa consciència d'aquest fet, car accentuen simplement la presència de la lletra *V* al llarg de la resultant de la taula de veritat. <u>Des de la perspectiva d'aquelles lògiques</u> són curioses les paraules de Quine a la <u>Mathematical logic</u> quan diu:
«<u>el terme 'tautologia' està pres de Wittgenstein. La noció present d'asseveracions</u> (statements) <u>tautològiques, com aquelles que són vertaderes en virtut de la mera composició de funcions de veritat, sembla estar d'acord amb l'ús del terme en aquell autor: Wittgenstein troba el mitjà de fer que el terme abarqui veritats</u>

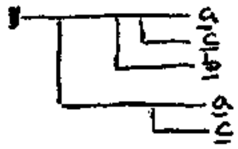
§25. Del principi de substitució.

Observem que, establerta una «llei analítica», nosaltres podem substituir una lletra per un nom més complex, p.e. en

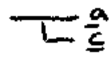
es pot reemplaçar cada "a" per



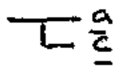
i tindrem una llei analítica com

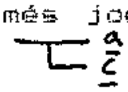


això sembla evident quan es considera que



seria un únic dibuix que valdria igual com un únic dibuix "a", i que sols estaria associat amb "V" i "F". Però en aquest cas hom pensaria



com un tot, i per tant sols quan es jutgés que és un nom per a un joc s'afegiria més joc al joc inicial. Ara bé: el mer fet de canviar "a" per  ja no sembla una circumstància analítica.

---

que contenen també quantificació, però això és sols la conseqüència d'un esforç per explicar la quantificació com una mena de mode infinit de composició de funcions de veritat. Un ús més ampli del terme 'tautològic' ha aparegut en la literatura posterior a causa de la doctrina de Wittgenstein que tota la matemàtica i la lògica són tautològiques. Però Wittgenstein proposà aquesta doctrina com una tesi, no com una definició de tautologia; i de fet és una tesi difícil de defensar. Tanmateix alguns que no mantenen la tesi en una tal forma, i que estimen que les inferències de la lògica i de la matemàtica són "tranformacions merament verbals" o "repeticions disfressades" sols en un sentit prou més ampli, s'han inclinat a esmerçar-hi el terme 'tautològic'. No és clar precisament quin és aquest sentit més ampli; però, qualsevol que sigui, ja hi ha per això un terme de gran prestigi preparat — el terme 'analític' de Kant» (pàg.55). La diferència sembla estar en el fet que hom obvia les taules de veritat una vegada apreses les regles d'inferència. (Respecte dels axiomes de la quantificació cal dir si més no que són tautologies en la nostra accepció de la paraula, cf.per exemple §29 punt 4, i que per tant teoremes provats amb la regla modus ponens pressuposen una selecció — o una repetició — de les possibilitats prèviament establertes).

i el fet d'anar estenent el joc no ho sembla tampoc, sinó que esdevé probablement un afegir joc al joc, de tal manera que s'augmenta l'abast sintètic que s'hi troba implicat. Cal tornar a repetir que entre

a(V)	c(V)	té lloc	d(V)	e(V)	té lloc
a(F)	c(V)	té lloc	d(F)	e(V)	té lloc
a(F)	c(F)	té lloc	d(F)	e(F)	té lloc
a(V)	c(F)	no té lloc	d(V)	e(F)	no té lloc

no hi ha res que sigui comú a l'un i a l'altre i que es diferencii de l'un i de l'altre. Per tant la lògica constructiva s'estén sintèticament tant com va establint jocs, esdevé analítica en la ~~mida~~ mesura que circumscriu els jocs ja esblerts[18].

§26. Sobre el construccionisme de les operacions lògiques.

El constructionisme de les operacions esdevé una activitat prou sui generis: aquí i allà fent un ús ~~furtiu~~ de significacions lingüístiques, és a dir, en el límit entre un estudi lingüístic i ~~no formals, en conjunt seria~~ un estudi formal, això és, un estudi d'aquest tros de realitat que són els nostres dibuixos. Certament — i superant per uns instants els seus propis processos d'aprenentatge i de generalització — sembla un joc amb anàlisis i síntesis: tindria moments analítics quan, partint d'un joc establert, en fés seleccions, però l'establiment del joc incorporaria experiències, i qualsevol ampliació del nombre d'elements del joc l'enriquiria sintèticament; d'altra banda val tal qual com a disciplina apresa.

La circumstància que l'explicitació del construccionisme operatiu inclogui unes breus anàlisis del ja determinat no implicaria que el saber analític fos un saber del ja determinat, com sembla palesar-se (deixant per amor de la claredat les anàlisis lingüístiques dels registres) en qualsevol individuació o en qualsevol anàlisi de quelcom real, ultra que no hi ha sobredeterminació. En aquells jocs no hi hauria anàlisi,

---

[18]Frege usa unes tals substitucions o reemplaçaments amb clara consciència que no altera les lleis fonamentals (Grundgesetze), per més que la substitució de cada lletra per $\frac{a}{b}$ (per exemple), no és esmentada mai, que nosaltres recordem, com a regla Ersetzung: sí en canvi que esmenta com a regla els casos paral.lels per al reemplaçament de lletres ~~llatines~~ (i gregues i gòtiques) a Grundgesetze § 48 (regles 9,10,11), amb exemples «deduïts» de les lleis fonamentals a §§ 49-52; alhora el principi de substitució fa en general que la síntesi nova sigui quelcom prou important en la lògica de qualsevol tendència que regli les operacions.

→ itàliques

simplement, sinó anàlisis d'una realitat sintètica construïda part a part: d'aquí que hom trobi el que ha posat (quan no hi és tot ~~[illegible]~~ ja com a quelcom après); a la resta de les altres ~~formes d~~'anàlisis hom, generalment, no torna al lloc d'on ha sortit: és clar que s'hi analitzaria quelcom que, d'alguna manera, era a l'abast, però el moment d'anàlisi no sembla estar contingut en la determinació des d'on s'analitza; el fet de determinar de manera despreocupada en la realitat no llevaria la mirada inspectora o fins i tot escorcolladora, com el fet d'esmentar quelcom sobre «els homes» (a tall de registre lingüístic) no llevaria el valor absolut d'esmentar-ho per als «terrassencs», etc. L'anàlisi del construccionisme, a més, fixaria (explicitat) una estructura i les respectives estructures paral.leles: per això mateix, com a tal ingnoraria l'abast dels moments lògics i empobriria considerablement les històries analítiques; d'aquí que no sigui sorprenent que es cregui que un hom té un saber «pur» en front de l'experiència[19].

---

[19]Al marge del construccionisme remarquem que el comentari que reserva l'ús del mot 'analític' per les determinacions que no poden ser mai falses (la lògica seria una disciplina analítica perquè estableix veritats necessàries) hauria de ser tingut com «una manera de parlar», en l'accepció que, establerta la generalització lingüística corresponent a partir de casos inspeccionats valids o dels usos lingüístics vàlids, la generalització és així mateix vàlida. Fet i fet no hi ha un sol exemple lògic que consisteixi en mera anàlisi (en la nostra accepció del mot 'anàlisi'): (1) la identitat d'A és la seva relació; (2) que A sigui una a i no sigui una be remet a l'experiència (i a l'aprenentatge); (3) els canatencs són catalans, els catalans són europeus, per tant els canatencs són europeus: ho estableixo tant pel domini lingüístic (sé què cal «pensar» en els diferents mots) com perquè és capaç de reflectir alguna inspecció més o menys imaginària; l'exemple és una veritat analítica en l'accepció que tant els canatencs com la resta de catalans són europeus, però alhora és sintètica perquè bé he d'establir qui és europeu i qui no: tot això s'exemplifica quan considerem que l'esquema BARBARA (i.e. «C és A», etc.) pres sense connivència no té sentit i que no hi ha sobredeterminació (l'esquema no substitueix els casos).

La lògica com a disciplina lingüística no fa més doncs que generalitzar (esquematitzar, cf.per exemple les paraules de Schröder a Vorlesungen I,pàgs.113-114, que segueix d'una manera lliure Charles S.Peirce) els casos vàlids que hem establert en els nostres usos lingüístics particularitzats o en les inspeccions, i tant en l'un cas com en l'altre hi ha síntesi, anàlisi, diferència, afers apresos, etc. Sens dubte encara hem d'estudiar una mica les generalitzacions, però permeti-se'ns ja concloure que la valoració de qualsevol lògica ~~[illegible]~~l com una disciplina analítica sembla més aviat una manera impròpia de parlar.

Sembla obvi doncs que ens trobem força lluny de circumscriure la lògica, que és, simplement, la determinació: no perquè fem un ús lax del mot per a expressar quelcom que no està en la ment d'aquell que podria definir la lògica com l'estudi de les inferències, sinó perquè l'estudi de les inferències en general és una resultant de les nostres consideracions reals (anàlisis, relacions, síntesis) i del domini lingüístic del lleguatge quotidià. I precisament perquè generalitzem podem acceptar una qualsevol anotació nova formal per a les nostres negacions, conjuncions, conseqüències i disjuncions[20] d'acord amb els nostres aprenentatges.

---

[20]El llenguatge quotidià usant la conjunció inclusiva i exclusiva la generalització ho mantindria així mateix: qualsevol autor podria precisar, és clar, amb quin ús pren la conjunció, però no sembla pas que aquell fet sigui un gran inconvenient (cf.per exemple «<u>aut sedes aut non sedes</u>» i el que digueren les lògiques tradicionals al respecte) quan no s'extrapolen la generalització lingüística i les lògiques corresponents (s'usi la conjunció o la disjunció, el condicional, etc.).

IV

LA PREDICACIÓ FREGERIANA
I LA CLASSE

Els lligams entre la lògica i el llenguatge es troben així mateix en d'altres àmbits: cal veure per exemple com entendre que la predicació sigui un afer lingüístic o en quina accepció prenem la classe com a quelcom extensional. Es tracta d'una sèrie de temes prou interessants per ells mateixos i en estreta connexió amb algunes de les maneres contemporànies de concebre la lògica i l'ús de termes generals.

§27. El llenguatge té un pensament. (sobre la significació)

Quan afirmem que en Pere és un home i que en Joan és un home, sembla que hi hagi quelcom comú, el fet de «ser home», que val per als casos d'en Pere i d'en Joan; alhora usaríem «ser home» en mil contextos en què no ens imaginem cap home o no tenim cap home en carn i ossos de tal manera que «ser home» significaria un qualsevol objecte amb uns caràcters específics.

Aquesta manera de veure les coses no força, sembla, cap anàlisi, però hi ha l'inconvenient que no té cura d'esbrinar una mica més aquest «ser home». D'una banda se suposa que usem «ser home» sempre de manera significativa en les nostres xerrades: si de fet ens serveix per a comunicar-nos implica que l'usem amb significació. I això és exacte, però no sembla que se'n tregui que usem sempre «ser home» amb una paral.lela significació: la llengua — ja ho insinuàrem — és sens dubte un bon instrument a l'hora de comunicar-nos, hi ha un sentit en la situació lògica on es parla i, tanmateix, diguérem que no sembla que l'eficàcia de cada paraula es derivi de la seva significació ostensiva. Nosaltres hauríem après més aviat l'ús dels mots, i en algun cas sembla que siguem capaços de donar-ne un sentit ostensiu (del mot 'home', per exemple), però sovint parlem sense pensar cada mot, i no sembla sensat d'afirmar que ens representem constantment tot el que anem dient. En les nostres converses parlem molt i hi ha un marge més gran o més petit d'un ús graciós de mots: podríem creure que s'hi troben molts mots que no són mai ostensius; que n'hi ha molts que són ben bé mera convenció social, a banda de les exclamacions, etc.; però fins i tot les paraules que poden ser ostensives serien usades perquè hauríem après que serveixen ostensivament, i per tant no tindríem necessitat d'imaginar un home o de tenir-lo davant per a trobar una significació per a 'home'. L'aprenentatge sembla en qualsevol cas una situació de fet: perquè usem així aquestes paraules derivem (si voleu imaginàriament) un aprenentatge. Nosaltres sabem què vol dir 'home', però la significació d''home' no remet potser a un ésser natural o a un ésser imaginat, sinó que sembla un ressò, el fet de parlar es convertiria aquí en un discurs de paraules perquè hauríem après llur ús i significació. En afirmar 'hi ha molts homes antipàtics' no sembla que tinguem necessitat de pensar en exemples, n'hi hauria prou a pensar les paraules. Les paraules tindrien un pensament, però això seria un fet.

Malgrat que la filosofia del llenguatge pugui tendir a creure's la seva legitimadora, sembla que cal concloure més aviat que el llenguatge està al servei de l'home i de les seves necessitats, i que per això la filosofia l'usa per a unes finalitats. El pensament de les paraules no sembla cap representació genèrica d'éssers naturals i imaginaris, sinó simplement el fet d'haver-les après: el llenguatge acompleix perfectament la seva funció derivada del fet que l'home és un ésser que parla i que viu en comunitat quan usa les paraules per a pensar en/amb elles i per a dialogar amb elles, sense que això obstaculitzi el fet d'usar-les com a mers noms per a significacions no lingüístiques: un mer discurs continuat de paraules es converteix segurament en garleria quan desatengués constantment la realitat no lingüística. El llenguatge no està al servei de la filosofia, sinó de l'home, i aquest usa el llenguatge per a les seves necessitats; alhora caldria potser reconèixer que la lògica de la realitat és la primera necessitat de l'home, que el pensament de les paraules s'introdueix en les situacions lògiques de l'home, i que l'home usa també el llenguatge quan investiga la lògica real.

Si tot això és encertat, llavors poden donar-se tantes situacions intermèdies com un hom vulgui, amb les conseqüents ambigüitats; ara bé, en investigar la lògica, podria establir-se (1) que el llenguatge és un nom d'una significació ostensiva circumscrita ("home") o un nom que entra en una significació ostensiva i/o que acompleix un paper lingüístic (l'ús d''aquest home', 'això', 'i', 'és', etc.); (2) que usem també moltes paraules com a meres paraules que tenen la seva pròpia virtut: el llenguatge té un paper autònom i no podem fer, en estudiar la filosofia, com si no uséssim també el llenguatge que usem constantment; (3) que el discurs filosòfic sols fa allò que fem quotidianament, però tenint cura de considerar la diferència: des d'aquí comprenem que el llenguatge sigui un possible niu d'embolics; (4) que fem el que fem el llenguatge usat pel seu propi pensament té, lògicament parlant, el valor d'un fet, d'una cosa real, que potser s'analitza en afeccions i en sons (o en una imatge acústica o en les paraules escrites). és possible que nosaltres també pensem així -- i no fóra cap vergonya -- i en tot això hi hauria aquesta lògica; pensaríem en aquesta lògica i pensaríem en qualsevol altra lògica. A la filosofia, és obvi, li interessa la lògica: estudia amb mots qualsevol lògica, i -- en el cas de l'encert d'aquestes paraules -- usa també el llenguatge com a mer pensament de paraules.

§28. Com entendre la informació gramatical en el contingut lògic.

En «en Joan és un home» i «en Pere és un home» estaríem pensant doncs en la pròpia virtut dè les paraules, i no cal que ens representem cap home per a saber que en Joan és un home -- o estaríem pensant en un home natural o imaginari, o passaríem d'un lloc a l'altre.

Prenent el primer camí tenim que «ser home» es diu d'en Joan, d'en Pere, etc., amb tota normalitat, i potser tendirem a pensar que hi ha alguna cosa comuna entre en Joan, en Pere, etc. Tanmateix podem considerar el següent:

en Joan	és home
en Pere	és home

on hi ha una igualtat lingüística, que fa una estructura amb «en Joan» i «en Pere». Però podem considerar això:

en Joan	és home
en Pere	
la Maria	
la Montserrat	

perquè la pròpia virtut de les paraules, sembla, m'hi duu, i.e. no cal que repeteixi la igualtat lingüística. Llavors, ¿per què creiem que hi ha alguna cosa comuna en «és home» o que «és home» enclou una significació genèrica o, si voleu -- i rebaixant plantejaments -- que es predica de prou individus efectivament plurals? La resposta sembla: pel propi pensament de «és home», això és, per l'afecció comportamental que hi ha, i.e. nosaltres hem après l'ús d'aquestes paraules i és amb la mateixa frescor amb què les usem que pressentim aquesta seva utilitat: això els donaria l'eficàcia i l'aurèola -- el cos dóna constantment unes tals experiències: observem-nos quan escrivim o caminem.

En "en Pere és un home" i "en Joan és un home" ens ocupem d'éssers de carns i ossos: llavors no hi ha un ésser "en Pere" i un altre ésser "és un home", sinó que hi ha un sol individu per als mots 'en Pere' i 'és un home', i ara el problema de creure que hi ha aquí un esment genèric o una predicació rau a justificar-ho. Sé que uso 'és un home' per a en Pere i per a en Joan, però això és la saviesa d'una igualtat lingüística. I si hi ha alguna cosa comuna que diferenciem d'aquest individu i d'aquell individu ha de ser justament diferenciada: però de fet no sembla que tinguem aquesta reflexió. Tanmateix hem vist que 'home' és el nom per a una individu, que podem estudiar l'afer a partir de l'estructura d'individus, que no té res d'estrany el fet d'afirmar "en Pere és un home", "en Joan és un home" i "en Pere i en Joan són homes" (cf. §16).

Llavors les dades són possiblement aquestes: el pensament de paraules d'aquest tipus permet la confecció d'estructures lingüístiques i el convenciment de la certesa que hi ha individus-repetits ~~[illegible]~~ per a un atribut (o atributs iguals) lingüístic~~, tot dins d'un factor afectiu~~. Però en les coses no lingüístiques els individus (i llurs estructures) reben un nom, per més que aquí es faci impossible de parlar d'individus i d'atributs lingüístics mentre es determini qualsevol síntesi no lingüística perquè se sap constantment què es determina. Però hi ha la possibilitat d'una certa confusió entre un camí i un altre: si hom admet la correcció de "en Joan és un home" i "en Pere és un home", o que "ser home" és l'atribut d'individus com "en Joan" i "en Pere", i com que de fet 'en Joan' o 'en Pere' poden ser noms per a "en Joan" i "en Pere" i de fet "ser home" remet a individus, pot semblar que tot ho confirma tot; hom pot creure que està determinant "en Pere" i "home" quan estudia termes i atributs del llenguatge.

És obvi que podem tractar talment els nostres pensaments lingüístics del tipus "en Pere és un home", "en Joan és un home", que creguem en efecte que prediquem una cosa igual o comuna ("és un home") a "en Pere" i a "en Joan", i que per tant siguin de "ser home" al costat del fet que "hi ha així mateix tots els homes": és inútil de pretendre que prou de les nostres reflexions no es basin en mers registres (en pensaments lingüístics) o que les nostres consideracions d'un individu, d'alguns individus o de tots els individus no s'hi circumscriguin, a aquells registres -- sinó de la circumstància que uns tals registres necessiten <u>aquí</u> de la connivència d'un mateix i dels altres, en l'accepció que de fet "en Pere sigui un home" i "en Joan sigui un home" o que «hi hagi homes». Es d'altres paraules, mentre el llenguatge en conjunt s'usa com a registre, l'esment d'un individu d'unes determinades característiques, d'alguns d'aquests individus o dels individus d'aquestes característiques pressuposa que hi hagi la possibilitat de tenir-ne (aquí) en carn i ossos, i precisament aquí "en Pere és un home", "en Joan és un home", "aquests homes" o «tots els homes» (per a aquest últim cas, cf. §§32-33) no hi ha anàlisi possible en dues parts "en Pere" i "és un home" (llevat de la seva identitat), o "en Pere", "en Joan", "la Maria", "la Montserrat" i "home" (hi ha la relació d'individus -- que són homes -- o llur estructura, que s'identifica amb ells), etc., i per tant hom <u>esperaria</u> que tractéssim els corresponents registres a tall de «representants» sense fer-se fort en les parts o sense considerar capital la distinció de parts: la contestació ~~[illegible]~~ que predico "home" a aquests quants individus hauria de circumscriure's a la construcció de frases, però en cap cas «individu» no hauria de ser res més que el subjecte gramatical.

Això és, qualsevol presentació d'un cas o de casos per mitjà d'un nou simbolisme hauria de ser considerat des d'aquest punt de mira com un mitjà expressiu més al costat dels nostres registres, sense accentuar en cap cas la <u>divisió</u> dels mots ~~noms~~ usats en l'expressió (llevat d'usos gramaticals). De tot això n'hi ha una prova contundent: sense la connivència dels registres del tipus esmentat de «representar» afers de carn i ossos qualsevol discerniment que aïlla les parts d'un simbolisme o dels nostres propis registres remet a un absurd: la consideració <u>merament formal</u> de 'en Pere" i 'és un home' no remet a res, sinó a la mera relació entre 'en Pere' i 'és un home', talment com entre 'anylch' i 'uh ihmlo'.

I, ~~a efectes pràctics,~~ [illegible]

El que anem comentant contina vàlid quan passem a frases que no tenen ostensivitat («el punt és allò que no té parts») o que amb prou feines en tenen («Sabadell és una ciutat», etc.): és clar que un primer punt no té parts i que un segon punt tampoc no en té, i que per tant prediquem «no tenir parts» al primer punt, al segon punt i a tots aquells punts que vulguem, però és que, llevat d'una anàlisi gramatical, no hi ha pas res que sigui un punt i que li prediquem «no tenir parts»: aquí hi ha un element d'absurditat perquè la informació lògica de punt ve donada precisament per la sentència «el punt és allò que no té parts» tal qual, i la informació lògica que pensem en determinar «un punt» és la mateixa, v.c. entenem com ~~i de fet~~ «un punt» com ~~és~~ l'abreujament d'«un punt que no té parts» (tots els altres punts tenen parts). D'altra banda, ens ho mirem com ens ho mirem, altres ~~afirmacions~~ del tipus «l'Estat és una institució complexa», «Sabadell és una ciutat», etc., semblen que ens ofereixin una informació lògica unitària: el parlant no té pas consciència que l'Estat i la institució complexa, Sabadell i una ciutat siguin respectives notificacions lògiques que enllacem, sinó que allò que és l'Estat i allò que és la institució complexa (en aquest cas) i allò que és Sabadell i allò que és una ciutat (en aquest cas) són una sola cosa i això és precisament el contingut (lingüístic) lògic que comuniquem -- en la mesura ~~mida~~ que n'hi ha ostensivitat valen com «en Pere és un home»; és clar que prediquem de la C.E.E. que és una institució complexa, i de Terrassa que és una ciutat, com sigui que ja dominem la llengua i sabem què pot fer de subjecte d'"institució complexa" o de "ciutat", però una tal saviesa lingüística i gramatical sols té un interès lògic (enllà d'una anàlisi de meres formes) perquè «la C.E.E. és una institució europea» o «Terrassa és una ciutat» és el contingut (lingüístic) lògic en persona. Repetim-ho, de tot això n'hi ha una prova contundent: sense la connivència dels nostres registres de «representar» els continguts (lingüístics) lògics qualsevol discerniment que aïlla les parts d'un simbolisme o dels nostres propis registres remet a un absurd: la consideració <u>merament formal</u> de 'punt' i 'no té parts', de 'Sabadell' i 'és una ciutat', etc., no remet sinó a una mera relació de dibuixos.

§ 29. <u>La funció en la «Begriffsschrift».</u>

1. En la <u>Begriffsschrift</u> Frege ens diu: «<u>Pensem en la circumstància d'expressar en el nostre llenguatge formal que l'hidrogen és més lleuger que el diòxid de carbó: llavors podem col.locar el signe per a l'oxigen o el signe per al nitrogen en el lloc del signe per a l'hidrogen. Amb això es modifica el sentit de tal manera que "l'oxigen" o "el nitrogen" entren en la referència en la qual estava abans "l'hidrogen". Mentre que hom pensa mutable una expressió tal i com ho hem fet, aquesta mateixa es divideix en un component que roman, que representa la totalitat de referències, i en el signe que es pensa reemplaçable per un altre signe i que significa l'objecte que es troba en aquelles referències. Anomeno funció el primer component, el seu argument el segon... Quan en una expressió, el contingut de la qual no cal que sigui judicable, un signe simple o complex ocorre en un o més llocs, i el pensem reemplaçable en tots o en alguns d'aquests llocs per una altra cosa, però arreu per una mateixa cosa, llavors anomenem funció la part de l'expressió que es mostra aquí immutable, el seu argument la reemplaçable</u>»(§ 9).

Les dades a retenir són les següent: (1) Frege està pensant en termes d'expressió, que té un contingut i uns signes o components formals; (2) els arguments estan representats per un signe reemplaçable, però en tant que significa l'objecte; (3) la funció serà el component restant, que roman invariable, però en tant que representa la totalitat de referències[1].

Frege parla doncs de la significació del signe que representa l'argument, o el signe que representa la totalitat de relacions; té molt clar que <u>no vol pas estudiar mers signes lingüístics</u>. Els fets semblen tanmateix que hi ha aquí un estudi gramatical dels mots que hi entren (per als quals hi ha noms con 'signe de l'argument' i 'nom de funció') i pels mateixos motius que assenyalàrem (§ 28). és difícil de no veure en la següent funció res més que una anàlisi d'expressions matemàtiques: «<u>Hom anomena x l'argument de la funció i reconeix en</u>

$$»2 \cdot 1^3 + 1«$$
$$»2 \cdot 4^3 + 4«$$
$$»2 \cdot 5^3 + 5«$$

<u>la mateixa funció, sols que amb arguments diferents, o sigui 1, 4 i 5. Cal adonar-se doncs que l'essència pròpia de la funció rau en</u>

---

[1]Cf.també <u>Funktion und Begriff</u>, pàgs.18-21. Remetem en general a aquest treball per a tot l'apartat de la funció. A les <u>Grundgesetze der Arithmetik</u> (I, § 1-6), com en l'article esmentat, parteix de la funció matemàtica per a arribar a la conclusió que l'ús del mot 'funció' en matemàtiques és sols un ús restringit: la seva pròpia concepció en faria un ús més originari.

⊥ o com a termes per a registre i per a mera forma, respectivament.

⊥, o com per als termes de la forma
"l'oxigen és més lleuger que el diòxid de carbó",

allò que és comú d'aquelles expressions; és a dir per tant en allò que en

$$«2 \cdot x^3 + x»$$

es troba fora de la «x», i que nosaltres podríem escriure de la següent manera

$$«2 \times (\ )^3 + (\ )».$$

Importa d'assenyalar que l'argument no pertany a la funció, sinó que conjuntament amb la funció constitueix un tot complet; perquè la funció per si sola s'anomena incompleta, que té necessitat de complement, o insatisfeta»[2], per més que se'ns torni a repetir que cal no confondre els signes amb l'essència de la funció.

En principi doncs sembla sensat de considerar 'argument' i 'signe d'argument' per un cantó, 'nom de funció' i 'funció' per l'altre com a termes sinònims⊥. Per això en "l'oxigen és més lleuger que el diòxid de carbó" no cal admetre els noms 'argument'/'signe d'argument', 'funció'/'signe de funció' com a noms per a aquella relació, sinó sols com a noms per als termes del registre lingüístic «l'oxigen és més lleuger que el diòxid de carbó»⊥ i al marge d'aquella relació. Per exemple

«hidrogen»	«és més lleuger que el diòxid de carbó»
«oxigen»	«és més lleuger que el diòxid de carbó»
«nitrogen»	«és més lleuguer que el diòxid de carbó»
«argument»/	«funció»/
«noms d'argument»	«nom de funció»

Nosaltres sabem usar expressions del tipus 'és més lleuger que el diòxid de carbó', i podem construir-ne moltes en un paral.lelisme estructural[3]. és obvi doncs que Frege està afectant el domini i l'ús del llenguatge alemany.

2. Frege afegeix que «per a expressar una funció indeterminada d'argument A, fem que A tancat dins d'un parèntesi vagi després d'una lletra, per exemple

$$\Phi(A)$$

Paral.lelament

$$\Psi(A, B)$$

significa una funció de dos arguments A i B, i que no està més determinada. Els llocs d' A i B dins del parèntesi representen

---

[2] Funktion und Begriff, pàgs.21-22.

[3] Consideri també el lector el text següent: «quan pensem "predicat" i "subjecte" en sentit gramatical, podem dir clar i ras: el concepte és la significació d'un predicat. l'objecte és allò que mai no pot ser la significació entera d'un predicat, però sí la significació d'un subjecte» (Über Begriff und Gegenstand, pàg.72; cf.pàgs.67-68).

aquí els llocs que A i B ocupen en la funció, ja siguin un o molts per a A o per a B. D'aquí que

$$\Psi(A,B) \text{ i } \Psi(B,A)$$

siguin de cap a cap diferents.

I les funcions indeterminades de molts arguments s'expressen d'acord amb tot això.

Es pot llegir $\vdash\!\!-\!\!-\;\Phi(A)$

com: "A té la propietat Φ".

I

$$\vdash\!\!-\!\!-\;\Psi(A,B)$$

pot traduir-se com "B està en referència-Ψ amb A" o "B és la resultant d'una aplicació del procediment (Verfahren) Ψ sobre l'objecte A »(§ 10).

Deixant de banda el traç de judici l'afer és curiós perquè, vista la fórmula '$\Phi(A)$' des de les Grundgesetze, es tractaria d'una marca itàlica d'objecte integrat per una marca itàlica de funció i una marca itàlica d'objecte; en d'altres paraules, no entraria dins d'un discurs en escriptura conceptual perquè no serien significatius. Sigui aquesta la interpretació encertada o no és sensat de creure que, usem els signes com a noms (en una accepció àmplia del mot) o com a afers merament lingüístics, les conseqüències semblen les mateixes: que hi ha algun paral.lelisme entre l'ús dels nostres llenguatges i l'ús d'aquells signes.

D'altra banda tant Φ com A no són en principi (interpretats a la llum de les Grundgesetze) generalitzacions: el mateix paràgraf de la Begriffsschrift (i el següent) esmenta la possibilitat de tenir Φ com un argument de funció, i el fet d'usar-hi lletres gòtiques.

No cal deslegitimar doncs l'ús d'uns tals signes, sinó més aviat tenir-los com a derivats (cf. § 34, punt 1).

3. Què passa doncs quan tenim[4]

$$\vdash\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\;\Phi(\mathfrak{a})$$

que significa el judici que la funció és un fet no important quins siguin els seus arguments, mentre es mantingui la judicabilitat? En principi tindríem que 'Φ' continua essent un signe per a quelcom que no és una generalització (tot i que fos una marca de funció); llavors potser no seria exagerat de creure que, la lletra argumental convidant-nos aquí a diverses estructures d'arguments,

[4] cf. Begriffsschrift § 11.

esdevé polisèmica, i que per conseqüent val més tenir la generalització d'arguments i la funció com a formes tan legítimes com qualsevol altra presentació d'un registre general.

4. Notem que en

$$\begin{array}{l} \vdash\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\; \Phi(A) \\ \quad \llcorner\!\overset{a}{\smile}\!\!-\!\!\!-\; \Phi(a) \end{array}$$

cal (deixant al marge la condicionalització) la nostra més plena connivència lingüística: aquí, és obvi, '$\Phi(A)$' i '$\Phi(a)$' serien uns dibuixos neutres si no els usèssim «tots aquests són homes» i «aquest és home» (i "tots aquests són homes" i "aquest és home"), en conjunt un cas més del tot i de la part[5].

com a afer lingüístic, talment com tenim

§ 30. La funció en les «Grundgesetze der Arithmetik». La designació universal des de la perspectiva de l'objecte i de la funció.

1. La més elaborada escriptura lògica fregeriana es troba a les Grundgesetze der Arithmetik (§§1-46)[6], i es fa a partir de l'ús del mot 'funció' tal i com l'entenen els matemàtics, així

$$`(2+3.\xi^2).\xi'$$

seria el nom d'una funció; la lletra 'ξ' serveix per a mantenir oberts els llocs argumentals: els noms d'argument els omplen (p.e. '1'), completen la funció, i llavors tenim el valor (15) de la funció per a l'argument (1). És clar que els valors de la funció no se circumscriuen a nombres; en

el nombre

$$\xi^2 = 4$$

tenim, per als arguments 0,1,2,3

$$`0^2 = 4' \quad `1^2 = 4' \quad `2^2 = 4' \quad `3^2 = 4'$$

que són expressions de pensaments en part vertaders i en part falsos: el valor de la funció $\xi^2 = 4$ és o el valor de veritat vertader o el de fals. Frege diu que, així com el nombre quatre és

---

[5]Prenem el cas de l'especificació com un exemple paradigmàtic: en qualssevol axiomes de la quantificació també es palesaria segurament llur constitució tautològica en la nostra accepció del mot.

[6]Tots els paràgrafs fan referència al primer volum de les Grundgesetze.

la significació (<u>Bedeutung</u>)[7] de '4' i '2²', el ver és la significació de '2² = 4' o '2+2 = 4' (per més que no tenen el mateix sentit)(§2)[8].

En el § 3 ~~s'afirma~~ es defensa que «la funció $\phi(\xi)$ té el mateix decurs de valor que la funció $\psi(\xi)$» i «la funció $\phi(\xi)$ i $\psi(\xi)$ tenen el mateix valor per als mateixos arguments» tenen la mateixa significació. En el cas de tractar-se d'una funció que té com a valors valors de veritat, llavors parlem de <u>concepte</u> i, en lloc de «decurs de valor» (<u>Werthverlauf</u>), parlem de l'extensió d'un concepte (<u>Umfang des Begriffes</u>). En el § 4 transforma les funcions que no tenen com a valor un valor de veritat (com la funció matemàtica de dalt) en referències (<u>Beziehung</u>) que tenen com a valor valors de veritat.

En el següent paràgraf (§5) introdueix el traç de judici (una ratlla vertical avantposada) i la ratlla de risc (una d'horitzontal que li és afegida), aquesta última (<u>que és una funció</u>) fent que el valor d'allò que conté a la dreta sigui un valor de veritat; l'asseveració (<u>Behauptung</u>), però, necessita també el traç de judici), i llavors «<u>ich</u> -- diu -- <u>fasse ihn</u> [i.e. <u>der Wagerechte</u>] <u>als Functionsnamen</u>». Frege introdueix aquí com a exemple un funció ($-\xi$) que sols pot tenir com a arguments valors de veritat (p.e. '2² = 4'), i a partir d'aquesta funció exemplifica el traç de negació (§6).

Després (§§ 7-8) presenta el signe d'igualtat: '$\Gamma = \Delta$' es refereix al vertader quan Γ és el mateix que Δ. És clar que ~~en~~ per

$$'x.(x-1) = x^2-x'$$

hi ha una universalització de la igualtat, que aquí sempre significa la veritat. Però

$$'x.(x-1) = x^2'$$

significa el fals quan introduïm '1' per 'x', i la veritat quan hi introduïm '0'. Com que el traç negatiu de

$$'\top\!\!-\; 2+3x = 5x'$$

no ens permetria de diferenciar la negació de la universalitat (<u>Allgemeinheit</u>) de la universalitat de la negació, Frege introdueix una nova expressió:

---

[7]Observi's la terminologia: «<u>Ich sage ferner, ein Name</u> drücke aus <u>seinen Sinn und</u> bedeute <u>seine Bedeutung. Ich</u> bezeichne <u>mit dem Namen das, was er bedeutet</u>» (<u>ibidem</u> § 2).

[8]Per a la funció matemàtica i amb un paral·lel descabdellament, cf. a part del treball ja citat <u>Funktion und Begriff</u>, <u>Was ist eine Funktion?</u>, sobretot pàgs.88-90.

$$`\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\!\top\ 2+3.\mathfrak{a} = 5\mathfrak{a}`$$

per a la universalitat de la negació, i

$$`\top\!\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\ 2+3.\mathfrak{a} = 5.\mathfrak{a}`$$

per a la ~~com a~~ negació de la universalitat. La universalitat s'expressaria ~~seria~~ llavors per

$$`\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\ 2+3.\mathfrak{a} = 5.\mathfrak{a}`$$

Per tant

$$`\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\ \Phi(\mathfrak{a})`$$

significa el vertader quan el valor de la funció $\Phi(\xi)$ per a cada argument és el vertader, altrament és el fals. Afegeix a continuació el recte ús de les lletres gòtiques.

S'ha esmentat ja l'equivalència que hi ha entre funcions que tenen iguals valors per a iguals arguments i funcions que tenen iguals decursos de valor. Frege creu que aquesta equivalència ha de ser factible en els seus signes, i així escriu (§ 9) per a

$$`\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\ \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{a}-1)`$$

l'expressió

$$`\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - \varepsilon) = \grave{\alpha}(\alpha.(\alpha-1))`$$

n amb ~~en~~ '$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 - \varepsilon)$' comprèn el decurs de valor de a funció $\xi^2 - \xi$, i amb '$\grave{\alpha}(\alpha\cdot(\alpha-1)$' el decurs de valor de la funció $\xi(\xi-1)$. En general es diu que

$$`\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)`$$

significa el decurs de valor de la funció $\Phi(\xi)$ (per això mateix traduirà més tard l'equivalència entre dues funcions que tenen iguals valors per a iguals arguments i dues funcions que tenen iguals decursos de valor així:

$$\vdash (\grave{\varepsilon}f(\varepsilon) = \grave{\alpha}g(\alpha)) = (\stackrel{\mathfrak{a}}{\smile}\ f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$$

tot constituint la cinquena llei fonamental). Després passa a explicar el recte ús de les lletres gregues minúscules. La caractització del decurs de valor és una de les novetats de les Grundgesetze, de conseqüències prou interessants: els decursos de valor poden entrar com a arguments en una funció.

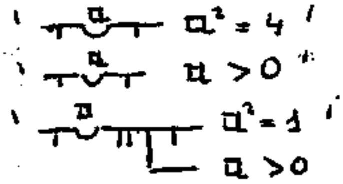
Per acabar presenta la funció $\backslash\xi$

que pot acomplir dues missions: o $\Phi(\xi)$ és un concepte, sota el qual sols cau un objecte, i llavors $\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ és aquesta objecte; o, si cap objecte no safisfà el concepte, llavors $\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ és el mateix que $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ (§ 11). Amb '$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$' hi ha la possibilitat doncs de traduir l'article determinat del llenguatge.

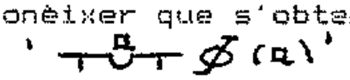
Els §§ 12-13 estudien el condicional, i passa després a l'estudi de les inferències i de les conseqüències, de les quals l'única imprescindible és la del <u>modus ponens</u>, però n'afegeix d'altres que abreugen la deducció (§§ 14-18). Ens recorda aquí l'ús de les lletres itàliques (§§ 17-18), que mai no signifiquen, sinó que indiquen (<u>andeuten</u>).

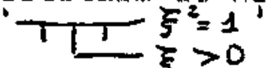
2. Fins aquí hem tingut el punt de mira posat en els objectes i les lletres d'objecte. és clar que també hem introduït lletres de funció, però no n'hem fet un estudi. Considerem doncs els noms

(1)
(2)
(3)

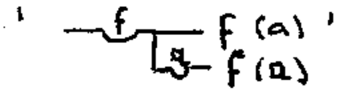


on és fàcil de reconèixer que s'obtenen a partir de

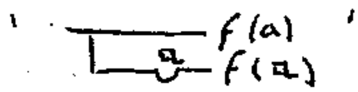


quan substituïm el nom de funció '$\Phi(\xi)$' pels noms de funció '$\xi^2=4$', '$\xi>0$',  . Per tant tenim en '$\smile^{\mathfrak{a}}\ \varphi(\mathfrak{a})$' una expressió en la qual el nom de funció es pot reemplaçar per noms de funció amb un argument. Així (1), (2) i (3) són valors de la funció $\smile^{\mathfrak{a}}\ \varphi(\mathfrak{a})$ per a diferents arguments. Aquí 'φ' juga el mateix paper que 'ξ' en '$\xi^2=4$': ni l'una ni l'altra pertanyen a la funció. Llavors les funcions els arguments de les quals són objectes les anomenem de primer grau; les que tenen com a arguments funcions de primer grau reben el nom de funcions de segon grau (i conceptes de primer i segon grau)(§ 21)*. Com a exemple de lletres gòtiques per a les lletres de funció tenim

⊥ les funcions que tenen per nom



d'itàliques per a les lletres de funció



En el § 22 ens presenta funcions i ~~relacions~~ referències de grau desigual i de grau igual, en el § 23 el concepte de segon grau que té com

---

*Noti's que la interpretació de les lletres de funció és un <u>casus belli</u>. Per a Quine, per exemple, 'F' (a 'Fx') -- com la 'p', 'q', etc., a 'p∧q' -- és una <u>lletra esquemàtica</u> col.locada en lloc del predicat que no pertany al llenguatge objecte i que no admet quantificació (cf. <u>Philosophy of logic</u>, pàgs.24-25, 66-67; <u>Methods of logic</u>, pàgs.22, 64, 82, 91-92, etc., i en especial la discussió de pàgs.203-208).

a arguments ~~relacions~~ referents de primer grau. En aquesta ascensió podem passar a funcions de tercer grau (§§ 24-25); per exemple nosaltres indiquem (andeuten) una funció de segon grau amb un argument (que és una funció de primer grau amb un argument) en

$$'M_{\beta}(\varphi(\beta))'$$

per mitjà de la lletra itàlica de funció 'M', talment com amb '$f(\xi)$' indiquem una funció de primer grau amb un argument. Aquí '$\varphi(\ )$' fa reconèixer els llocs argumentals, talment com 'ξ' ho fa en '$f(\xi)$'. La lletra 'β' omple el lloc argumental de la funció que entra com a argument (Frege no ens dóna exemples de l'ús de gòtiques per a noms de funció de tercer grau).

3. Val la pena de recollir també algunes definicions en el text següent:

«En l'escriptura conceptual no vull anomenar noms les lletres gòtiques, itàliques i gregues perquè no han de significar res. Per contra anomeno un nom '$-\!\smile^{\mathfrak{a}}\!-\mathfrak{a}=\mathfrak{a}$', per exemple, perquè significa el vertader; és un nom propi. Per tant anomeno un nom propi o un nom d'un objecte un signe que ha de significar un objecte, el signe sigui simple o complex, però no aquell signe que sols indica un objecte.

Quan d'un nom propi excloem un nom propi, que constitueix una part de l'anterior o que coincideix amb aquell, en alguns o en tots els llocs on ocorre, i de tal manera que es pot reconèixer que aquests llocs han de ser omplerts per un mateix nom propi qualsevol (llocs argumentals de primera classe), llavors anomeno allò que obtenim un nom d'una funció de primer grau amb un argument. Un tal nom constitueix, conjuntament amb un nom propi que ompli els llocs argumentals, un nom propi. Conforme a això tenim en 'ξ' un nom de funció sempre que la lletra 'ξ' sols faci reconèixer els llocs argumentals. La funció anomenada amb això té la propietat que el seu valor per a cada argument coincideix amb aquest argument.

Quan d'un nom d'una funció de primer grau amb un argument excloem un nom propi, que constitueix una part de l'anterior, en tots o en alguns llocs on ocorre, i de tal manera que es pot reconèixer que aquests llocs han de ser omplerts per un mateix nom propi qualsevol (llocs argumentals de primera classe), llavors anomeno allò que obtenim un nom d'una funció de primer grau amb dos arguments.

Quan d'un nom propi excloem un nom d'una funció de primer grau, que constitueix una part de l'anterior, en tots o en alguns llocs on ocorre, i de tal manera que es pot reconèixer que aquests llocs han de ser omplerts per un mateix nom qualsevol d'una funció de primer grau (llocs argumentals de segona o de terca classe), llavors anomeno allò que obtenim un nom d'una funció de segon grau amb un argument, i de segona o de tercera classe segons si els llocs argumentals són de segona o de tercera classe...

Quan en un nom propi substituïm noms propis, que constitueixen una part de l'anterior o coincideixen amb aquell, per lletres d'objecte, i noms de funció per lletres de funció, llavors anomeno allò que obtenim marca d'objecte. Si la substitució sols es fa amb lletres itàliques, llavors anomeno la marca obtinguda marca itàlica d'objecte. Per tant les lletres d'objecte són també marques d'objecte, i les lletres itàliques d'objecte marques itàliques d'objecte...

Quan en un nom de funció substituïm noms propis per lletres d'objecte, i noms de funció per lletres de funció, llavors anomeno allò que obtenim marca de funció, i marca d'una funció de la mateixa classe que aquella, el nom de la qual l'ha originat. Si la substitució sols es fa amb lletres itàliques, llavors anomeno la marca obtinguda marca itàlica d'una funció. També les lletres de funció són marques de funció, i les lletres itàliques de funció marques itàliques de funció»(§ 26).

Per tant

lletres itàliques, gòtiques i gregues -> no són noms (no signifiquen res: solament indiquen)

nom o nom propi (d'un objecte, p.e. $\text{'}\!-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$) ——> un signe simple o complex que significa un objecte

$$\overbrace{\text{nom de funció de primer grau amb un argument} \qquad \text{llocs argumentals de primera classe}}^{\text{nom propi}}$$

nom de funció de primer grau amb un argument = $\overbrace{\text{nom de funció de primer grau amb dos arguments} \qquad \text{lloc argumental}}$

lloc argumental ↓ omplerts amb noms propis

llocs argumentals de primera classe ↓ omplerts amb noms propis

$$\overbrace{\text{nom d'una funció de segon grau amb un argument} \qquad \text{llocs argumentals de segona i tercera classe (i.e. funcions de primer grau amb un argument o dos)}}^{\text{nom propi}}$$

llocs argumentals de segona i tercera classe ↓ omplerts amb noms de funció de primer grau

$$\text{nom propi}\left\{\begin{array}{l}\text{noms propis} \rightarrow \text{lletres d'objecte}\\ \text{noms funció} \rightarrow \text{lletre de funció}\end{array}\right\} \rightarrow \text{marca d'objecte}$$

(si a través de lletres itàliques) → marca itàlica d'objecte

$$\text{nom funció}\left\{\begin{array}{l}\text{noms propis} \rightarrow \text{lletres d'objecte}\\ \text{noms funció} \rightarrow \text{lletre de funció}\end{array}\right\} \rightarrow \text{marca de funció}$$

(si a través de lletres itàliques) → marca itàlica de funció

El text certament és clarificador en alguns punts: (1) un hom no té noms propis d'objecte quan està usant meres lletres; (2) tampoc no té noms de funció quan està usant meres lletres. Per tant la substitució de noms propis per lletres o de noms de funció per lletres fa que tinguem marques d'objecte o de funció. Dins d'aquest context s'entenen les repetides advertències de Frege[10].

L'excepció la fan les lletres gòtiques quan rauen damunt del clotet (Höhlung), perquè de les itàliques en conjunt cal dir «que en una lletra itàlica el domini ha d'encloure tot allò que hi ha en la proposició més enllà del traç de judici. Per aquest motiu no es pot expresssar mai la negació de la universalitat amb una lletra itàlica, però sí la universalitat de la negació. No hi ha doncs cap ambigüitat. Però es pot veure per això mateix que l'expressió de la universalitat amb lletres gòtiques i el clotet no és supèrflua. El nostre~~s~~ establiment del domini d'una lletra itàlica ha de delimitar-lo per sota, no per sobre; d'aquí que es puguí estendre un tal domini a moltes proposicions, cosa que fa que les lletres itàliques siguin escaients per a fer un servei en les inferències, quan les gòtiques no el poden fer a causa de la circumscripció

[10] «Més aviat 'ξ' no ocorrerà mai en els propis descabdellaments de l'escriptura conceptual; l'usaré sols en l'exposició de l'escriptura conceptual i en els esclariments» § 2 (nota1); usant '$-\Delta$' ens diu que «naturalment el signe 'Δ' no ha de ser sense significació, sinó que cal que signifiqui un objecte. En l'escriptura conceptual no han d'ocórrer noms sense significació. Allò que establim s'interpreta doncs que '$-\Delta$' en tots els casos significa quelcom, donat sols el cas que 'Δ' signifiqui quelcom. Altrament $-\xi$ no seria cap concepte delimitat rigorosament, per tant ni de lluny cap concepte en el nostre sentit. Faig servir doncs les lletres gregues majúscules com a noms , com si signifiquessin quelcom, sense que en lliuri la significació. En el propi descabdellament de l'escriptura conceptual ocorreran tan poc com 'ξ' i 'ζ'» § 5 (nota 3), etc.

estricta del seu domini»[11]

Podria creure's, però, que quan escriu conceptualment la definició del nombre a partir d'una funció $\xi \frown \zeta$ que explica des de $,\Delta \frown \grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)'$ que té el mateix significat que $,\Phi(\Delta)'$, etc., la introducció de noms sembli derivar-se de la presentació de marques.

4. Ens hem circumscrit a una breu sinopsi d'uns importants paràgrafs de les Grundgesetze, que basta per a entreveure-hi la genialitat indiscutible de Frege. Adonem-nos tanmateix que no cal prendre molt seriosament

$$\underline{y} = (2+3.\underline{x}^2).\underline{x}$$

com un fet universal, car sembla més aviat una resultant (cf. § 50) en la qual '$\underline{x}$' i '$\underline{y}$' poden prendre's com a noms d'altres ~~formes~~ nombres, p.e.

$\underline{x}$ 1,2,3,4,5,etc.
$\underline{y}$ 5, 28, 87, etc.

això és, o '$\underline{x}$' i '$\underline{y}$' són noms per a ~~una forma~~ un nombre, o són noms per a una estructura (mai no indefinida) de ~~formes~~ nombres. La circumstància que *x* representi ~~la forma~~ el nombre *1* i que *$\underline{y}$* representi ~~la forma~~ el nombre *5*, i que

---

[11] ibidem § 17; cf.també el següent text: «una lletra itàlica té com a domini el contingut de tot el judici, sense que s'assenyali això per mitjà d'un clotet en el traç de contingut... Cal que es reemplaci sempre una lletra itàlica per una gòtica que no ocorri en el judici, mentre que s'ha de col.locar el clotet immediatament després del traç de judici. Per exemple en lloc de

$$\vdash\!\!-\, X(a)$$

es pot posar

$$\vdash\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\, X(\mathfrak{a})$$

quan a sols ocorre en els llocs argumentals de $X(a)$ » (Begriffsschrift § 11). Si més no la línia d'argumentació de Frege sembla diferir conceptualment de la distinció de Peano de les variables en reals i aparents (cf.Notations de la logique mathématique, pàgs.137-138; Studii di logica matematica, pàgs.206-207; Logique mathématique, pàg.243, i el seu darrer treball sistemàtic de lògica matemàtica, Formules de logique mathématique, pàg.312), que els Principia Mathematica segueixen (cf.I, pàg.16-17). Frege té cura, sembla, de l'afer de l'abast de la lletra, Peano més aviat es preocupa de saber quina és la lletra que fa de variable en la funció, que no necessita circumscriure l'abast perquè coneixem ja a quina classe pertany la variable; caldria certament un estudi més detallat de tota la història, que possiblement assenyalaria alguns equívocs entre Frege i Peano.

tinguem

$$5 = (2+3.1^2).1$$

té certament una veritat, valgui el cas el fet que "u al quadrat és u, multiplicat per tres són tres, més dos fan cinc, i multiplicat per 1 fa cinc" és una colla de determinacions ~~formals~~ apreses així; altrament

$$4 = (2+3.1^2).1$$

seria fals perquè no existeix cap aprenentatge ~~formal~~ que hi dugui: hi haurà hagut algun error, alguna equivocació en el càlcul ~~formal~~. Sembla doncs que no hi ha cap inconvenient d'anomenar 'argument' 'x', i 'valor' 'y', quan per a "x" prenem un nombre ~~forma~~ qualsevol (per tant 'x' seria una lletra per a anomenar arguments) i calculem quin nombre ~~forma~~ és ~~la~~ correcte. Però sembla poc probable que la funció matemàtica sigui precisament allò que es troba entre un argument i un valor, això és que «l'essència de la funció es fa conèixer més aviat en la correspondència que s'estableix entre els nombres, els signes dels quals posem en lloc de 'x', i els nombres que resulten, presos com les significacions de la nostra expressió; una correspondència que es representa intuïtivament en el decurs de la corba, la igualtat de la qual és 1b

$$y = (2+3.x^2)$$

en coordenades rectangulars. L'essència de la funció està doncs en la part de l'expressió que es troba fora de la 'x'. L'expressió d'una funció té necessitat de complement, està insatisfeta. La lletra 'x' sols serveix per a mantenir oberts els llocs a un signe numèric que ha de complementar l'expressió, i per tant fa reconèixer la classe especial de la necessitat de complement que forma l'essència pròpia de la funció dalt assenyalada. En el que segueix s'usarà la lletra 'ξ' en lloc de 'x' amb aquesta finalitat...»(§1), de tal manera que tindrem el nom de funció

$$'(2+3.\xi^2).\xi'.$$

Aquell "entre" tanmateix és prou torbador: la darrera fórmula no sembla la nostra funció matemàtica; fins i tot prenent, contra l'opinió de Frege (per al qual 'ξ' és sols una lletra que té una finalitat esclaridora, i.e. els «forats» del nom de funció), un nombre (p.e. 1) o una estructura de nombres, per exemple el nom de

$$'(2+3.1^2).1'$$

o

$$(2+3.1^2).1$$
$$2^2.2$$
$$3^2.3$$
$$4^2.4$$
$$5^2.5$$

hom no sap veure on és el nom de la nostra fórmula matemàtica: mentre no aparegui un nom per al valor no hi ha funció matemàtica. La funció matemàtica sembla aquí una funció entre x i y, això és, quan parlem del fet que y és funció de x, o diem solament això, o diem, per exemple, que si 'x' és el nom per a 1, llavors 'y' és el nom

per a 5; si 'x' ho és per a 2, llavors 'y' ho és per a 28; si 'x' ho és per a 3, llavors 'y' ho és per a 87, etc. (per tant, en una segona accepció, 'argument' i 'valor' serien tant noms per a "x" i "y", com per a allò que anomenen).
('x' i 'y')

Frege canvia, sembla, l'accepció de la funció matemàtica quan creu que

$$(2+3.(\ )^{2})(\ )$$

~~és~~ expressa la seva essència: però aquí no hi hauria res més del que hom veu en aquest dibuix; hauria sobreestimat el fet de poder anar representant

$$5 = (2+3.1^{2}).1$$
$$28 = (2+3.2^{2}).2$$
$$87 = (2+3.3^{2}).3$$
etc.

i la circumstància que aquí hi ha les igualtats

$$(2+3.\ ^{2}).$$
$$(2+3.\ ^{2}).$$
$$(2+3.\ ^{2}).$$

, i.e. la relació pressuposa òbviament els termes que relaciona, i:

La funció matemàtica ~~sembla~~ una relació entre x i y, entre 1 i 5, o entre els seus noms; 'funció' seria un nom per a una relació donada, fos entre x i y, fos entre 1 i 5, fos entre la sèrie 1,2,3 i la sèrie 5,28,87. Per consegüent el motiu que s'ha tingut per posar-ho en relació no cal prendre'l ~~[illegible]~~ més enllà de qualsevol ~~delimitació~~ circumscripció, sinó que

$$y = (2+3.x^{2}).x$$

es limita segurament a relacionar y amb x a través d'altres nombres — o diem, per exemple, que «1 al quadrat és 1, multiplicat per tres fa tres, sumat amb dos fa 5, i multiplicat per 1 fa cinc». Un tal motiu entraria dins de la història de la funció, i per això els motius diversificarien les funcions[12].

---

[12]Som conscients que extremem la duresa crítica en tractar la funció fregeriana quan es refereix a fórmules matemàtiques, perquè la podríem entendre talment com ho fem amb Peano (cf. §34, punt 2). No hi ha dubte que qualsevol ús de la funció lògica prové de l'existència de funcions matemàtiques: el problema neix que l'anotació lògica de Peano és més aviat instrumental, això és, treballa una formalització sobre la ja donada formalització matemàtica, mentre que en Frege hi ha, sembla, una discutible interpretació d'allò que entenem per funció matemàtica, que més aviat regla d'acord amb les pròpies concepcions de la funció i de l'argument.

A propòsit d'una recensió dels Principia Mathematica, Peano escriu: «In Formulario, logica-mathematica es solo instrumento pro exprime et tracta propositiones de mathematica commune; non es fine ad se; logica-mathematica es explicato in 16 pagina; uno hora de

Quan Frege transforma una funció que no té com a valors valors de veritat en una referència (que per tant té com a valors valors de veritat i que cal no confondre amb el que nosaltres anomenem relació ni amb el que anomenem funció en matemàtiques) agombola els problemes; d'una banda creu que l'essència de la referència està justament en la part insatisfeta que manté oberts dos llocs argumentals, d'altra banda creu que la significació (*Bedeutung*) d'una referència és el vertader o el fals: d'això n'hem de parlar encara una mica.

5. Sembla difícil d'admetre que el vertader i el fals esdevinguin valors tal i com ho vol Frege; que

$$\xi^2 = 4$$

sigui una funció, on "ξ" és el lloc argumental ens duu segurament a negar que '$(\ )^2 = 4$' sigui el nom de la funció matemàtica

$$x^2 = 4$$

que posaria en relació (en la nostra accepció del mot) un nombre i x a través d'una forma '=' o 'igual'; d'altra banda ~~hauríem après~~ establiríem que, per exemple,

$$2^2 = 4$$

perquè hi ha aquí una relació d'igualtat entre

$$4 \quad 4$$

que, estèticament i per tal de posar una nota formal que faciliti que determinem justament aquesta relació, pot perllongar-se amb

$$4 = 4$$

que es llegeix "quatre és igual a quatre".

Sigui doncs per aprenentatge, sigui per la igualtat de ~~formes~~ nomenclàtures (i no hi ha necessitat de rebutjar absolutament que hom pensi també en igualtats de nombres estructurals i concrets, cf. §§ 37ss), etc., tindríem que és veritat que "quatre és igual a quatre", i és fals que "el quadrat de tres sigui igual a quatre" o que "nou sigui igual a quatre": independentment ara de la concepció de la igualtat en qüestió, la veritat i la falsedat semblen esmentar el bon ús o el mal ús de les paraules o dels aprenentatges: és fals que "nou sigui igual a quatre" perquè no he après mai aquesta determinació ~~formal~~, o perquè la determinació relacional entre ~~el mot 'nou'~~ 9 i '~~quatre~~ 4' (o la d'entre nombres estructurals o d'entre nombres

---

<u>studio suffice pro cognosce quod es necessario in applicationes de isto novo scientia ad mathematica. Libro de nostro Auctores tracta logica-mathematica ut scientia in se, et suo applicationes ad theoria de numeros transfinito de vario ordine</u>» (*Opere*, pàg.391). Aquest fet deixaria lliure el pas a presentacions de l'aritmètica del tall de les *Arithmeticas Principia*, que consideraríem com una formalització que condensa les resultants de prou aprenentatges on, és clar, difícilment valdria una crítica del tipus de la metamatemàtica.

concrets) no admet l'ús del mot 'igual', es rebutja aquest ús fins i tot sense necessitat de pensar en una determinació no lingüística de relació d'igualtat.

Tot això implica segurament que el vertader i el fals no formen part ni del "quatre" ni de l'altre "quatre" en la determinació «quatre és igual a quatre» -- ni del "nou" o el "quatre" en «nou és igual a quatre»-- sinó que o són mers registres, o són uns noms que comprovarien les ~~per a un sentiment en~~ «quatre és igual a quatre» o que les fan bons per a un desafecte en «nou és igual a quatre». El vertader i el fals no estarien en la forma 'igual' ni estarien en la relació ~~entre~~ "quatre/quatre" o "nou/quatre" per un cantó, i la forma 'igual' per l'altre, sinó que es diuen (si es vol) ~~d'una~~ en una experiència en l'ús dels mots. Llavors, en el cas de ser mers registres, s'esgoten quasi en aquesta det ~~formalitat~~; si no ho són semblen mots que entren en determinacions on s'aprova l'ús d'altres mots o on se'l desaprova[13].

El concepte fregerià sembla que comporta doncs un canvi en la noció de la funció matemàtica i una certa confusió entre les determinacions on es diuen els valors de veritat de la funció i aquests valors de veritat.

6. La funció $-\xi$, que tindria com a arguments valors de veritat (i té valors de veritat com a valors), hauria d'interpretar-se en principi com una funció de prou universalitat, com sigui, per exemple, que '$2^2 = 4$' o '$2<4$' o 'en Joan és un home' (tenint 'en Joan' significació) en serien noms d' arguments.

A banda d'aquesta funció, i continuant l'estudi de les lletres d'objecte, Frege introdueix l'ús de les lletres gòtiques a partir d'un exemple d'igualtat, on els arguments no són valors de veritat, però sí la significació. Però sembla que interpretant

$$\underline{x}(\underline{x}-1) = \underline{x}^2-\underline{x}\ .$$

com una funció matemàtica, aquesta conté necessàriament els termes de la relació (no seria una funció fregeriana); el nom de la funció fregeriana

[13]En general la veritat d'un càlcul matemàtic es basa en els bons aprenentatges: 598017 + 246532 = 844549 és veritat perquè segueix les regles de la suma, i.e. hem après que «set i dos fan nou, u i tres fan quatre, etc.». D'altra banda el càlcul matemàtic generalitzant-se ell mateix (cf. per exemple §§ 34 i 50), podem dir que la veritat d'una prova, deixant els usos ~~posicionals~~ concrets dels nombres, es basa així mateix en el bon ús de les operacions apreses en la prova, això és, en un ordre d'operacions apreses (es tracta d'una accepció del mot provar, la més usual en el càlcul numèric, cf. però § 49).

$$`(\ )((\ ) - 1) = (\ )^2 - (\ )'$$

o sols és això, o és un nom <u>per a una altre</u> (o d'altres)

$$`(\ )((\ ) - 1) = (\ )^2 - (\ )'$$

(extret de $`2(2-1) = 2^2 - 2'$)

tal i com vam veure dalt.

Diguem-ho una vegada més: la manera de tractar aquella funció matemàtica és del tot vàlida en la ~~mida~~ mesura que no vol substituir-la, sinó anomenar-ne parts i ser <u>així</u> una funció (fins i tot funció matemàtica en una accepció ampla dels mots).

Quan Frege la presenta doncs a través de

$$`\!-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\ \mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1) = \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{a}'$$

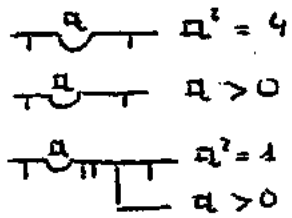
no fa més que oferir-nos una altra manera (no la usual) d'escriure una funció matemàtica, del tot admissible i fins i tot prou útil perquè permet la negació de la universalitat i la universalitat de la negació enteses com a registres lingüístics, a més de la circumstància — segurament un escrúpol excessiu — d'haver diferenciat lletres gòtiques i itàliques d'objecte.

Afegim dues notes a la formulació fregeriana del decurs de valor: perquè, en una funció en la qual els valors no són valors de veritat, en aquest cas el nom del decurs de valor podrà ser considerat un nom per a un valor o per a una estructura de valors (o un nom per a la conducta lingüística de «cap valor»), quan no el tenim com a mer registre; no tenint-lo com a registre, si la funció té com a valors valors de veritat, llavors aquell nom anomenarà també els valors i els seus associats, serà una estructura de valors, o ~~el el~~ un valor, o ~~el de~~ «cap valor» (cf. §30 punt 8). Tot això, certament, podrà introduir-se com a argument d'una funció ~~a entrar en el nom d'una funció~~. Un hom entén que cregués que $`\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)'$ fos una traducció de l'article determinat en el cas que $\Phi(\xi)$ fos un concepte sota el qual cau sols un objecte; perquè el valor d'aquest objecte resta associat a l'objecte, i per tant ell serà en persona[14].

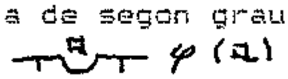
[14] La teoria de les descripcions, prou descabdellada per exemple als <u>Principia Mathematica</u> I, pàgs. 30ss, 66ss, 173ss, o a la <u>Introduction to mathematical philosophy</u> de B. Russell, pàgs. 167-180, i que tots els grans lògics, començant pel mateix Frege, han tractat, mereix segurament un estudi específic, obviat aquí en la ~~mida~~ mesura que no és necessari per a les nostres finalitats. Assenyalem potser la conveniència prèvia de clarificar com s'usa el llenguatge i la circumstància que les traduccions que va proposant semblen canviar fins i tot el pensament lingüístic.

Recordem que per a Frege '$\top\!\!\!\sqsubset^{\xi}_{\zeta}$' el nom d'
és una funció amb dos arguments: aquí el nom de la funció (i.e. '$\top\!\!\!\sqsubset$') podria ser interpretat com un element d'una igualtat o com el nom per a un element o com el nom per a una estructura d'elements iguals. Això és, '$\top\!\!\!\sqsubset^{\xi}_{\zeta}$' sembla el nom d' una funció amb iguals drets que '$\xi = \zeta$', i que treballa com el nostre esquema «si... llavors...».

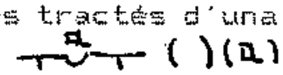
7. Sembla entreveure's que les anomenades funcions de segon grau treballen ~~per a~~ respecte de les funcions de primer grau igual com les funcions de primer grau respecte dels seus ~~valors~~ → arguments, i.e. tenim una forma o tenim un nom per a quelcom o per a una estructura mai no indefinible. En el cas de les funcions



la funció fregeriana de segon grau



representa <u>com si</u> es tractés d'una funció fregeriana de primer grau



amb una forma-nom 'φ' i per això les gòtiques per al nom de funció s'haurien d'interpretar igual que les gòtiques per al nom d'objecte, i la resta del nom propi com si es tractés d'una funció fregeriana de primer grau.

Les funcions fregerianes de tercer grau funcionarien respecte a les funcions de segon grau, com les de segon grau respecte de les de primer grau: la part de la funció que es pot substituir per funcions de segon grau s'hauria d'interpretar <u>com si</u> fos el lloc argumental d'una funció fregeriana de primer grau (que seria la resta), i per això la lletra d'aquell nom pot ser gòtica.

Sempre sembla tractar-se doncs de retenir les igualtats i de posar el nom a la resta: la lletra d'objecte és un nom (o una forma) mentre la funció de primer grau és una forma o un nom per a coses iguals o n'és una -- però quan tenim una funció de segon grau, llavors tot allò que era funció de primer grau, respecte d'altres funcions de primer grau, té encara parts iguals i parts que reben un nom: una de les primeres esdevé per a Frege una funció de segon grau (i nosaltres hem d'interpretar el nom com una lletra de lloc argumental i la resta com una funció de primer grau), que podem llegir de nou com a forma o com a noms per a formes, etc. Tot plegat sembla una anàlisi de ~~formes~~ llenguatge i el fet de donar noms: hi hauria una selecció.

Això mateix sembla suggerir quelcom de més ampli abast: que és segurament impossible de constituir mai la sintaxi d'una fórmula (aconseguida com a resultant) a través de l'escarida descripció dels signes que hi entren (construccionisme de les operacions, reglatge de la quantificació, pretensions metamatemàtiques, etc.); i que més aviat un hom defineix la sintaxi d'una fórmula gràcies a la connivència que usa les parts com a registres «ja carregats significativament».

8. Esmentàrem en el punt sis que el nom del decurs de valor (quan no el tractem com a mer registre) sembla una forma o un nom per a una estructura, per a un valor i fins i tot per a "cap valor", segons els casos; afegim que, en el cas de tractar-se de valors de veritat, el decurs de valor pren els noms d''~~abast~~ extensió d'un concepte' o 'classe' i d''~~abast~~ extensió d'una referència' o 'relació', i.e. Begriffsumfang: Klasse, Umfang einer Beziehung: Relation. Des d'un punt de mira del pensament simbòlic de Frege la diferència entre un concepte i el seu corresponent decurs de valor pot semblar diàfana: el concepte arrel quadrada de 4, i.e. $\xi^2 = 4$, sembla tenir com a decurs de valor $2^2 = 4$ i $(-2)^2 = 4$, que són els valors de veritat vertaders, i per a qualsevol altre argument el valor de veritat és allò fals. Des d'un altre punt de vista, però, el nom d' aquella funció podria semblar una forma o un nom, dins d'aquest joc

$$2^2 = 4$$
$$(-2)^2 = 4$$

i per tant el nom que pren el decurs de valor no seria el signe d'una funció fregeriana ni d'un argument fregerià, sinó que, quan no l'usem com a mer registre i l'interpretem amb una certa liberalitat, per primera vegada tindríem aquí el nom per a una estructura completa que contindria alhora allò que era anomenat per la funció (el nom d'una funció era per a un cas o per a una estructura) i allò que era anomenat per la lletra, qualsevol que fos[15].

---

[15] Tanmateix podria creure's que quan cap argument no satisfà una funció les anàlisis fregerianes semblen discutibles; tinguem per exemple el concepte $\top \xi = \xi$ o no igual a si mateix: en principi, quan « $\top \xi = \xi$ » s'apliqués als llenguatges naturals o a les fórmules matemàtiques semblaria ser-ne un registre equivalent en la ~~mica~~ llengua que equivaldria al registre «no igual ~~a~~ a si mateix»: però podria discutir-se si « $\top () = ()$ » és realment equivalent al registre «no igual a si mateix», registre que no necessita satisfer-se. 1φ

Deixant el concepte fregerià: la no admissió de «no igual a

Prenguem ara la funció fregeriana $\vdash \xi$, els valors de la qual són sempre valors de veritat, i.e. és un concepte. En principi defineix una classe; tanmateix, no tractant-la com una forma, el decurs de valor que podem determinar és <u>una</u> síntesi forçosament circumscrita: el decurs de valor (la classe) entès com el conjunt de tots els possibles valors per als arguments que la satisfan és aquí <u>un recurs lingüístic</u> que fa de <u>comanda</u> lingüística, com ho poden fer la definició de punt o la noció d'infinit. En totes les funcions que no hi hagi un nombre circumscrit de valors de veritat, el decurs de valor conté necessàriament una absència lògica pel fet de ser impossible la seva determinació extralingüística: la classe dels homes, per exemple, quan no es tracta d'un afer lingüístic, no conté pas, sembla, més que uns pocs individus. que tingui per nom

Hi ha encara un tercer punt: la funció 'és home', per exemple, sembla formada per mots -- "ser home" seria una estructura definida d'individus o un individu, que rep el nom propi d'"en Joan" i en aquest cas hi hauria quasi sinonímia entre "en Joan" i "ser home"; segurament no hi ha manera de diferenciar un "és home" a "en Joan", però sí que podem diferenciar un "és home" dins de "en Joan és home"; podria néixer doncs un possible equívoc entre el nom de funció fregeriana i l'individu que és home o l'estructura d'individus, mentre la composició d'"en Joan" i d'"és home" ("en Joan és home") no esdevé "en Joan és home": el decurs de valor manté així oberta aquesta nova ambivalència, de tal manera que no sabem si estem parlant -- quan no es tracta d'un registre -- d'una estructura definida d'individus o d'una estructura definida de registres ("en Joan és home", "en Pere és home", etc.)[15].

Adonem-nos que entre la classe com a decurs de valor d'un concepte i el propi concepte hi ha una imbricació, en la ~~mida~~ mesura que entenem el nom d'una funció (o el nom unitari de funció i lloc argumental) com el nom per a una estructura. Potser valgui la pena apuntar que Frege considera que la classe és el conjunt de <u>valors</u> d'una funció (que és un concepte), per més que no s'està d'afegir que «<u>uso les paraules</u>
<u>"la funció $\phi(\xi)$ té el mateix</u> decurs de valor <u>que la funció $\psi(\xi)$"</u>
<u>d'una manera universal amb la mateixa significació que les paraules</u>

---

si mateix» es basa segurament que es determina 4 com a 4/4 -- determinem aquesta relació -- i el refús de "no igual a si mateix" és el refús de 'no igual': el refús assenyala la incorrecció del mot 'no' mentre determinem quelcom que no és no igual a si mateix (i.e. 4); i després hi hauria els registres i les generalitzacions corresponents.

[15]Si el lector vol exercitar-s'hi a partir del primer exemple es tracta del pas de la determinació de la forma 'igual' o '=' a la determinació d'una igualtat.

"les funcions $\phi(\xi)$ i $\psi(\xi)$ tenen sempre el mateix valor per al mateix argument"»[16]; o que fins i tot es permeti de dir que «dic que quelcom pertany a una classe quan cau sota el concepte, l'extensió del qual és justament la classe»[17]. Observi's que els Principia Mathematica fan tres quarts dels mateix, car estableixen que «una classe (que és el mateix que una multiplicitat o un agregat) és tots els objectes que satisfan una funció proposicional»[18]; es tracta doncs del conjunt d'arguments d'una funció, mentre que sembla que consideren també la classe com, en llenguatge fregerià, el decurs de valor[19]. La circumstància que no podem individuar sense reconèixer alguna cosa sembla assenyalar tanmateix que l'ús de mers arguments per a circumscriure la classe s'hauria de prendre com una altra manera d'esmentar els valors de veritat en l'accepció fregeriana, que explicitarien lingüísticament allò que es fa de fet.

§ 31. Les connexions entre classe i funció.

El comentari s'ha circumscrit fins aquí a una paràfrasi de les nocions de funció i de classe en Frege, que les traeix en la ~~mida~~ mesura que demana representació: és indubtable que Frege mai no hauria defensat que un concepte necessités exemplificar-se en objectes concrets ni molt menys amb tots els objectes que tenen la propietat d'un concepte; sovint fins i tot se'n burla, d'aquesta possibilitat. D'altra banda el concepte té la prerrogativa de delimitar la classe[20], cosa que no lleva la formulació de la cinquena llei fonamental de les Grundgesetze (cf. §§ 3,9 i 20) i l'interessant esclariment, a propòsit de les referències de pertinença i d'inclusió, que «per tant si volem fer clara la diferència entre les dues referències, ens cal tenir les classes com les extensions de conceptes i basar-hi una traducció. Provem doncs d'establir el que segueix:
Si v és un individu i A és la classe dels objectes que són a,

---

[16] Grundgesetze der Arithmetik, § 2.

[17] Idem, II, pàg.254 (Nachwort).

[18] loc.cit. I, pàg.23.

[19] «Així en correspondència amb una funció $\phi\hat{x}$, hi ha un camp o col.lecció de valors, que són totes les proposicions (vertaderes o falses) que poden obtenir-se tot donat les determinacions possibles a x en ϕx. Un valor de x per al qual ϕx és vertader direm que "satisfà" $\phi\hat{x}$ », ibidem I, pàg.15. Noti's el joc entre el valor-proposició i el valor-variable.

[20] Possiblement el treball més contundent en aquest respecte sigui la seva Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E.Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik, en especial pàgs.108-112.

<u>llavors traduïm</u>

,v subter A'

<u>per</u> ,v <u>és un</u> a'; <u>i si</u> B <u>és la classe dels objectes que són</u> b, <u>llavors traduïm</u>

,B sub A'

<u>per ,tots els</u> b <u>són</u> a'»[illegible], on val la pena remarcar tres fets: (1) Frege ens confirma en una nota que l'equivalència entre 'subter' i 'sub' amb els símbols 'ε' i '$\supset$' de Peano[illegible]; (2) la traducció de la pertinença i de la inclusió en termes de conceptes; (3) que la pertinença i la inclusió són referències (<u>Beziehung</u>). Deixem-ho així.

Si ara passem als <u>Principia Mathematica</u> trobem, sembla, algunes repeticions, però també un cert canvi d'actitud envers els connexions entre classe i funció, que podem resumir en sis punts:

(1) S'estableix que la classe està determinada per la funció.

(2) La classe no pot ser un argument de la funció que la determina (teoria dels tipus).

(3) Es presenta el problema de si la classe té existència com un objecte o no. Els <u>Principia</u> opten per fer veure que els símbols de classe (com les descripcions) són símbols incomplets que no tenen significat per ells mateixos; l'afer esdevé aquí secundari mentre afegeixen: «<u>que a la lògica formal li hagin de concernir</u>

[illegible]<u>loc.cit.</u>, pàgs.99-100.

[illegible]També s'ha volgut veure en la funció fregeriana

$$\Vdash \backslash\grave{\alpha}\left(\overset{\mathfrak{g}}{\smile}\!\!\begin{array}{l}\mathfrak{g}(\underline{a}) = \alpha\\ \underline{u} = \grave{\varepsilon}\mathfrak{g}(\varepsilon)\end{array}\right) = \underline{a} \frown \underline{u}$$

la versió d'aquest lògic per a «$^{x}\underline{a}^{x}$ és un membre de la classe $^{x}\underline{u}^{x}$»; pel cap baix la fórmula no deixa de ser extremadament subtil. Més endavant (1896) Frege escrivia a Peano que «<u>no tinc necessitat de cap signe primitiu especial per aquesta «K», ans puc escriure per això</u>

$$\grave{\alpha}(\grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown \alpha) = \alpha)$$

<u>que sols consta de signes meus introduïts prèviament. Per tant si volgués admetre el signe simple K i definir-lo, ho podria fer amb la igualtat</u>

$$\grave{\alpha}(\grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown \alpha) = \alpha) = K$$

»,

on 'K' és el símbol de classe en l'italià (p.e. $^{x}a \in K^{x}$, i.e. «a és una classe»): el lector hauria d'entendre '$\varepsilon \frown \bar{\alpha}$' <u>com a</u> '$x \bar{\in} a$', llavors $\grave{\varepsilon}(-\varepsilon \frown \alpha)$ seria l'extensió, això és, <u>com a</u> tots els <u>x</u> que acompleixen '$\underline{x} \in \underline{a}$', d'aquí que una tal extensió s'iguali amb $\bar{\alpha}$; finalment, si cal anotar 'classe en general', copsarem l'extensió de tots els valors d'α.

principalment o les intensions o les extensions constitueix una disputa que té molts anys. En general els lògics, la formació dels quals era principalment filosòfica, s'han dedicidit per les intensions, mentre aquells, la formació dels quals era principalment matemàtica, s'han decidit per les extensions. Els fets semblen ser que, mentre la lògica matemàtica necessita extensions, la lògica filosòfica refusa de proporcionar res que no sigui intensions. La nostra teoria de les classes admet aquests dos fets oposats aparentment, i els reconcilia, tot mostrant que una extensió (que és la mateixa cosa que una classe) és un símbol incomplet, l'ús del qual adquireix sempre la seva significació per mitjà d'una referència a la intensió»[23].

(4) Creient que una funció de funció (predicativa) intensional pot convertir-se en una funció extensional equivalent, alhora que per l'axioma de reductibilitat es postula que sempre hi ha una funció predicativa formalment equivalent a $\phi\hat{z}$, s'estableix de manera general que

$$\vdash : \underline{x} \in \hat{\underline{z}}(\phi \underline{z}) \equiv \phi x$$

(5) Es recull la cinquena llei bàsica de Frege.

(6) Els *Principia* defensen en el pròleg de la segona edició (1927) que totes les funcions de funcions han de prendre's potser extensionalment, que caldrà potser abandonar l'axioma de reductibilitat i que no hi ha més raons per a distingir entre funcions i classes: la distinció fins i tot perd aquella ombra que conservava encara en la primera edició[24].

Observem doncs que el tema de la relació entre classes i funcions és prou apassionant, i caldrà abordar-lo d'una manera més

---

[23] loc.cit.I, pàg.72.

[24] «Per a molts propòsits una classe i una característica que la defineix són pràcticament intercanviables. La diferència crucial entre les dues consisteix en el fet que hi ha sols una classe que tingui un conjunt donat de membres, mentre que hi ha sempre moltes característiques diferents per les quals pot definir-se una classe donada. Es poden definir els homes com a bípedes sense plomes, o com a animals racionals, o (més correctament) pels trets amb que Swift descriu els wahoos. és el fet que una característica definidora no sigui mai única que fa útils les classes; altrament ens bastarien les propietats comunes i privatives dels seus membres. Es pot usar doncs qualsevol d'aquestes propietats en lloc de la classe quan no és important la unicitat», *Introduction to mathematical philosophy* (1919), pàg.13-14; per a seguir una tal línia en textos més recents, cf.per exemple, Quine a *Mathematical logic*, pàgs.120-121; *Methods of logic*, pàg.204; *Set Theory and its logic*, pàg.2.

es podria

detallada; abans, però, recordem que el *Nachwort* de les *Grundgesetze der Arithmetik* conté la famosa paradoxa russelliana[25]. En la línia dels *Principia Mathematica* ~~caldria~~ dir que la classe de les classes que no es pertanyen a si mateixes o classe K ha estat concebuda en principi a partir de la funció *classe que no es pertany a si mateixa* (A). Les dades són aquestes: la classe K no és pas indeterminada, sinó una resultant a partir d'una certa concepció. Per tant hom no podria dir que la classe K pot caure dins d'aquesta concepció perquè pressuposaria que no sap què determina amb la classe K. Però pot prendre's la classe determinada K *dins d'una nova concepció* anomeñada *classe que que no es pertany a si mateixa* (B), la classe de la qual (classe M) és una estructura que conté K i les altres classes (reduplicades). De fet la teoria dels tipus dels *Principia Mathematica* arrenquen de suposicions d'aquesta mena, com podem llegir en la següent observació preliminar: «*se segueix de dalt que una proposició tal com "tots els judicis fets per Epimènides són vertaders" prima facie sols*

---

[25] «*Ningú no voldrà afirmar que la classe dels homes sigui un home. Tenim aquí una classe que no es pertany a si mateixa. Dic en efecte que quelcom pertany a una classe quan cau sota el concepte, l'extensió del qual és precisament la classe. ¡Col.loquem ara sota la nostra mirada el concepte* classe que no es pertany a si mateixa! *L'extensió d'aquest concepte, en el cas que en calgui parlar, és doncs la classe de les classes que no es pertanyen a si mateixes. L'anomenarem d'una manera abreujada la classe K. ¡Preguntem-nos ara si aquesta classe es pertany a si mateixa!¡Suposem primerament que sí! Si quelcom pertany a una classe cau sota el concepte, l'extensió del qual és la classe. Per consegüent si la nostra classe es pertany a si mateixa, llavors és una clase que no es pertany a si mateixa. El nostre primer supòsit aconduei x doncs a una contradicció amb ell mateix. Suposem segonament que la nostra classe K no es pertany a si mateixa: llavors cau sota el concepte, l'extensió del qual és ella mateixa, es pertany doncs a si mateixa. ¡També així una altra vegada una contradicció!*», *loc.cit.*,II pàgs.253-254. Frege afegeix que la contradicció presentada per Russell posa en qüestió la llei fonamental V, $\vdash (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\alpha} g(\alpha)) = (\smile^{\mathfrak{a}} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}))$,

perquè podria ser que un decurs de valor d'una funció en sigui també un valor i que no ho sigui per a l'altra funció (no podem passar de la igualtat de decursos de valor a la igualtat de les generalitzacions), i d'aquí que introdueixi aquesta nova llei fonamental en lloc de la primera

$$\vdash (\grave{\varepsilon} f(\varepsilon) = \grave{\alpha} g(\alpha)) = \smile^{\mathfrak{a}} \begin{array}{l} f(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{a} = \grave{\varepsilon} f(\varepsilon) \\ \mathfrak{a} = \grave{\alpha} g(\alpha). \end{array}$$

Notem que els *Principia Mathematica* mantenen la primera versió de la cinquena llei (cf.I, pàgs.187ss.) perquè la teoria dels tipus no permet que la pròpia funció entri com un argument.

podrà ser vertader si tots els judicis d'Epimènides són del mateix ordre. Si són d'ordres varis, el més alt dels quals és l'enè, podem fer n assercions de la forma "tot els judicis d'ordre m fets per Epimènides són vertaders", on m tingui tots els valors fins a n. Però cap judici així pot incloure's ell mateix en el seu propi àmbit d'acció des del moment que un tal judici és sempre d'un ordre més alt que els judicis als quals es refereix»[26]. La teoria dels tipus basteix sens dubte una solució bastant original de prou paradoxes, malgrat que pressuposa l'ús de l'axioma de la reductibilitat, tant per a deixar pas a la lògica de classes com per a poder garantir la definició d'identitat[27].

§32. La classe i la intensió.

La teoria de conjunts està certament plegada de dificultats, l'origen d'alguna de les quals és possible que ragui precisament en l'equivalència o l'aproximació entre la tinença d'una propietat i la pertinença a una classe, mentre es considera que una propietat és quelcom intensional. Prenguem un text altament pedagògic de Russell:

«Una classe o una col.lecció pot definir-se de dues maneres que semblen prou distintes a primera vista. Podem enumerar els seus membres, com quan diem, "La col.lecció que vull dir està integrada per Brown, per Jones i per Robinson". O podem esmentar una propietat definidora, com quan parlem de "la humanitat" o de "els habitants de Londres". La definició que enumera es diu una definició per "extensió", i la que esmenta una propietat definidora es diu una definició per "intensió". D'aquestes dues classes de 15
definició, la que és per intensió és lògicament més fonamental. Això es veu amb aquestes dues consideracions: (1) que la definició extensional pot reduir-se sempre a una d'intensional; (2) que la intensional sovint no pot reduir-se, fins i tot teòricament, a la que és extensional. Aquests dos punts necessiten unes paraules d'explanació:

«(1) Brown, Jones i Robinson, tots ells, posseeixen una certa propietat que res més en el món no té, o sigui la propietat de ser o Brown o Jones o Robinson. Aquesta propietat pot usar-se per a donar una definició per intensió de la classe que consta de Brown, de Jones i de Robinson. Considerem una fórmula com "x és en Brown o x és en Jones o x és un Robinson". Aquesta fórmula serà vertadera sols per a tres x, o sigui en Brown, en Jones i en Robinson. Des d'aquest punt de vista s'assembla a una equació cúbica amb les

---

[26] loc.cit.I, pàg.46.

[27] Cf. tanmateix la *Introducció* a la segona edició dels *Principia Mathematica* (1927).

seves tres arrels. D'altra banda pot prendre's com assignant una propietat comuna als membres de la classe que consta d'aquests tres homes, i que els és peculiar. Un tractament similar pot aplicar-se, és clar, a qualsevol altra classe donada en extensió.

«(2) és evident que en la pràctica tenim molta informació d'una classe sense ser capaços d'enumerar-ne els membres. Ningú no podria enumerar de fet tots els homes, o fins i tot tots els habitant de Londres, malgrat que tenim molta informació de cadascuna d'aquestes classes. Això basta per a mostrar que la definició per extensió no és necèssaria per al coneixement d'una classe. Però quan passem a considerar classes infinites, trobem que l'enumeració no és ni teòricament possible per a éssers que sols viuen un temps finit. No podem enumerar tots els nombres naturals: hi ha 0,1,2,3, etc. En algun punt ens hem d'acontentar amb 'l'etcètera'. No podem enumerar totes les fraccions, o tots els nombres irracionals, o tota una qualsevol altra col.lecció infinita. Així el nostre coneixement respecte d'unes tals col.leccions sols pot derivar-se d'una definició per intensió»[29].

L'explicació és prou interessant: a "en Pere és un home" no hi havia l'ésser "en Pere" i un altre ésser "home", sinó un sol individu en carn i ossos que rebia els noms d''en Pere' i d''home'; que l'anàlisi d'aquests mots era més aviat gramatical i que el fet de predicar d'un qualsevol subjecte (humà) que «és un home» es devia precisament al domini lingüístic: des d'aquest punt de vista el predicat «és un home» sols sembla poder circumscriure un individu de carn i ossos com un home pel fet que "aquest individu és un home", això és, perquè abandonem les predicacions i atenem l'afer en carn i ossos; la reiteració de casos no llevaria doncs la circumstància que en Pere i la Maria no serien homes perquè hi prediquem «ser home», sinó que ho serien per se. En d'altres paraules cap individu de la classe dels homes no tindria res a veure amb la predicació «ser home», que reflecteix el domini lingüístic i el fet que sabem construir frases.

Però fins i tot si passem al registre «en Pere és un home», usat doncs sense ostensivitat, sembla que s'hi inclogui un contingut (lingüístic) lògic unitari en el qual no hi hauria un individu-contingut lògic «en Pere» i un altre individu-contingut lògic «és un home», sinó, com diem, una informació unitària que no predicaria per se «és un home» d'«en Pere», i de fet la predicació sols tindria un interès lògic perquè «en Pere és un home», altrament seria sols una anàlisi de construcció de frases. Fet cap baix en aquest cas hi ha la prova fefaent de l'ostensivitat; però, en conjunt, i fins i tot en aquells casos on no és possible, defensaríem que l'atribució, la predicació, la intensió, etc., no serien els afers lògics rellevants (ho són per al filòleg), no tindrien res a veure amb els individus de carn i ossos o amb els

---

[29] Introduction to mahematical philosophy, pàgs.13-14.

continguts (lingüístics) lògics dels nostres registres, sinó que serien la conseqüència del nostre domini lingüístic en la determinació d'afers extralingüístics o dels nostres registres.

Que la classe integrada per en Brown, en Jones i en Robinson esdevé intensional quan la considerem a partir de la fórmula «x és en Brown o x és en Jones o x és en Robinson», que seria la propietat, no sembla que mereixi més comentari[19].

D'altra banda el fet de definir una classe tot parlant de la «humanitat» o dels «habitants de Londres» introdueix certament unes altres consideracions~~pot ser una mica problemàtic per motius diversos dels esmentats~~. Perquè els motius per a l'ús aquí del mot 'intensional' són, sembla, (1) que hi ha una propietat del tipus «x és un home» o «x és un habitant de Londres», que ja hem esmentat; o (2) que els homes o els habitants de Londres són més dels que de fet puc enumerar. Els dos afers no són ben bé el mateix -- i això hauria de ser una qüestió rellevant -- tot i que Russell els imbrica. Considerem ara el segon motius d'ús del mot 'intensionalitat' això és, el fet que sembla que «els homes» englobi més individus que aquells que podem enumerar, afer que segurament està del tot allunyat del primer. La circumstància que no sembla haver-hi un "home" que no sigui "en Pere" o algun individu imaginat, o fins i tot que el mer registre «en Pere és un home» informi d'un contingut (lingüístic) lògic, inclina més aviat a pensar que «els homes» com a gènere humà esdevé una indicació lingüística prou útil en la comunicació entre individus; però si enumerant quatre individus de carn i ossos o registrant «quatre individus» parlo de la classe d'aquests quatre individus, els motius pels quals s'admet «els homes» són els mateixos que els motius pels quals sembla legítim l'ús de «la classe dels homes». El problema aquí no està a desligitimar una expressió perquè no n'hi hagi posicionalitat (i els usos del llenguatge col.loquial valen d'una manera absoluta), sinó a explicar-la (i donar-ne una digressió) per mitjans que no acondueixin a situacions ridícules: i ho és el fet de creure que «els homes» és una intensió (predicació) que enllaça amb «x és un home»; però o més aviat un hom registra «els homes» sense més comentari, o ha d'estudiar individus de carn i ossos, o registra per exemple «en Pere és un home».

extralingüística

Un dels grans problemes que ha tingut doncs la teoria dels conjunts ha estat, sembla, el barreig de consideracions lògiques rellevants amb afers lingüístics o, en d'altres paraules, que la

---

[19] De fet sembla haver-hi un ús que distorciona un poc els usos quotidians. Quan comento «aquest és en Brown» a una tercera persona no estic dient que el pot anomenar 'en Brown', sinó que l'inicio a un comportament davant d'un individu, comportament en el qual entren noms. L'expressió «x és en Brown» no entraria, per un fet prou comprensible, dins de les pautes lingüístiques ordinàries.

classe no té res a veure amb propietats (predicacions) ni amb intensions en l'accepció que l'anàlisi gramatical no supleix l'anàlisi no lingüística o el contingut (lingüístic) lògic dels nostres registres. Les classes són consideracions extensionals, però es pot creure que el mateix fet d'oposar extensions i intensions ha fet malcomprendre l'extensió[30], d'aquí que encara

---

[30]Cal aplaudir doncs, per exemple, la manera de presentar Peano les proposicions (cf.per exemple Studii di logica matematica, pàg.209; Logique mathématique, pàgs.250-251; Formules de logique mathématique, pàg.314): estableix allò que ell anomena 'proposició' a partir de la classe i de la pertinença, i on seria fàcil de veure el manlleu que els Principia Mathematica en feren i les modificacions que introduïren. D'altra banda Peano sembla reaci de llegir $x \in a$ en termes de propietat (cf.Logique mathématique, pàgs.242-243), mentre, magistralment, introdueix el símbol de classe («Cls») -- per exemple a Formules de logique mathématique -- de la següent manera:

«.3 Cls

«Cls» signifie «classe».

Ce symbole a la forme K dans F1889 et dans les travaux de plusieurs Auteurs. Il a la valeur du mot « ὅρος » d'Aristote, «terminus» des scolastiques; et correspond aussi à «idée générale, nom commun,...» du langage ordinaire, et aux expressions «ensemble, Menge» des mathématiciens»(pàg.313).

A propòsit del «salt» qualitatiu des de la logística de Peano a la de Frege i Russel L.Brunschwicg escriví:

«En la mesura que pot presentar el Formulari com a organum, desplegat i perfeccionat constantment per la labor de M.Peano i dels seus col.laboradors, la logística existeix, i es troba a recer de qualsevol protesta seriosa. és un mètode didàctic per a la ciència, heurístic per a l'epistemologia; tracta diverses formes de la lògica o de la matemàtica, però no decideix la identitat de llur contingut; transcriu, reduint-los a llur expressió més simple i més clara, els principis de la ciència: però no té la pretensió de donar-ne compte. Ofereix al filòsof una matèria l'elaboració de la qual ha dut tan lluny com és possible; però roman en el domini de la ciència positiva: «no és un dels mèrits més petits del simbolisme lògic adoptat per Peano i els seus col.labordors, escriu un d'entre els principals d'ells, el fet de possibilitar l'enunciació de les premisses fonamentals de cada branca de les matemàtiques d'una forma extremadament reduïda i simplificada, alliberada de tot element accessori, i susceptible per això mateix d'assumir les interpretacions més plurals i més heterogènies» (Vailati, De quelques caractères du mouvement philosophique contemporain en Italie).

«En aquest sentit el problema de la filosofia matemàtica es trobaria enllà del mètode logístic; però podrà trobar la solució en un sistema logístic on les nocions, fins llavors familiaritzades per l'ús d'un algoritme comú, són incorporades en endavant a la unitat d'una mateixa síntesi. Les proposicions de la matemàtica són haguem de dir alguna cosa sobre la naturalesa de la classe.

§33. La noció de classe.

¿Què entenem per una classe, un conjunt, una agrupació o, fins i tot, un agregat o una pluralitat?[34] Segurament podríem respondre

---

reduïdes a proposicions de la lògica, de tal manera que, per a justificar la veritat de la matemàtica, no caldria ja fer comanda de principis específics; la teoria de la lògica estant feta, la teoria de la matemàtica es trobaria alhora feta.

«Aquest pas de la logística mètode a la logística sistema és Frege el primer que l'ha realitzat» (Les étapes de la philosophie mathématique, pàgs.381-382).

[34] D'acord amb la prou coneguda caracterització de Cantor, «per un "conjunt" (Menge) entenc qualsevol col.lecció M d'objectes m, determinats i ben diferenciats, de la nostra intuïció o del nostre pensament (que s'anomenen els "elements" de M), en un tot» (Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, pàg.282): el lector observarà que val sols com una aproximació; anys abans esclaria el mot «Mannigfaltigkeitslehre» tot afegint que «amb aquest mot designo un concepte tèoric de molt ampli abast, que fins avui sols havia intentat d'assumir en l'específica confecció d'una teoria aritmètica o geomètrica de conjunts. Per una "multiplicitat" o "conjunt" entenc arreu quelcom plural que es pensa com a un, això és qualsevol suma d'elements determinats que pot vincular-se a un tot per una llei, i crec que amb això defineixo alguna cosa que està emparentada amb l'εἶδος platònic o ἰδέα, com ho està també amb allò que Plató anomena μικτόν en el seu Diàleg "Fileb o el bé més alt"» (Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, pàg.204). Cal reconèixer que el text podria introduir prou malcomprensions.

Com a nota històrica recordarem també el següent text de Boole -- un home que evità curosament d'introduir en el seu càlcul lògic afers epistemològics: «acordem de representar la classe d'individus als quals es pot aplicar un nom o una descripció particular per una lletra simple com x. Si el nom és "homes", posem el cas que x representi "tots els homes", o la classe "homes". Per una classe s'entén usualment una col.lecció d'individus, a cadascun dels quals pot aplicar-se un nom o una descripció particular; però en aquest treball el significat del terme s'estendrà fins a incloure el cas en el qual sols existeix un simple individu que respon al nom o a la descripció requerits, com també els casos denotats pels termes "no-res" i "univers", que com a "classes" haurien d'entendre's que comprenen "cap ésser" i "tots els éssers" respectivament» (An investigation of the laws of thought, pàg.28).

D'altra banda cal fer un molt especial esment de les Vorlesungen über die Algebra der Logik d'Ernst Schröder, i hi remetem el lector, la introducció de les quals conté (vol.I, d'acord a punts de vista diversos:

(1) Partim de primer d'afers ostensius: en aquesta accepció es tracta, sembla, d'individus aplegats per qualsevol motiu o aplegats per ells mateixos: la classe d'en Pere, d'en Pau i de la Maria no té cap necessitat de bastir-se per la relació de cada membre amb un quart objecte; la classe dels germans d'en Toni arreplega un dels membres de successives relacions fins a bastir la totalitat dels membres de la classe. Ara bé, ho fem sense més motius externs o amb motius externs, ni en l'un cas ni en l'altre no ens interessen per se les predicacions lingüístiques.

Però segurament ens enganyaríem si consideréssim sols la teoria de conjunts com la de les estructures d'aquests tres homes, d'aquests quatre gossos, d'aquests sis habitatges, etc., en tant que estructures d'homes, de gossos, d'habitatges, etc., car llavors seria obligat sempre d'afegir la mena de classe de què parlem si no fos obvi pel context. Es tracta que cada home, cada gos, cada habitatge, etc., fins i tot cada estructura, és diu 'un individu', això és 'una cosa', però que ~~es digui que~~ 'A' ~~és~~ sigui una cosa' pot esclarir-se pel fet que 'cosa', 'individu', són noms-jòquers (§12). Per tant una classe és una classe de coses: la classe d'en Pere, en Pau i la Maria és exactament la mateixa que la classe d'aquests tres individus o coses.

Reculem una mica: la classe, l'estructura -- com també diem -- aplega individus i el fet d'anomenar 'home' en Pere obeeix, en

---

pàgs.83-107) una de les discussions més completes sobre la intensionalitat del concepte i l'extensionalitat de la classe, no gens malencaminades i sovint carregades de bon sentit; alhora la primera Vorlesung (vol.I, pàgs.126-167) és sens dubte un dels textos més útils per a comprendre que «estem en condicions d'incorporar ("reunir") qualsevol objecte del pensament com a individu en una classe». Cal reconèixer que Schröder té prou bones intuïcions arreu: afegeix, per exemple, que «també aquella classe que comprèn en si mateixa un conjunt d'individus pot tenir-se de nou com una cosa mental i en aquesta mesura també com un "individu" (en sentit ampli, això és, "relativament" respecte d'una classe més alta). Tanmateix quan parlem d'un individu "en sentit absolut (estricte)", entenem amb això un objecte del pensament, el nom del qual s'esmerça com a nom propi i no com un nom comú» (pàg.148), que, malgrat la crítica fregeriana (i l'ambrolla que pot considerar) conté un encert bàsic; el treball de Schröder, altament pedagògic, fa veure així mateix que les lletres del seu càlcul elemental serveixen igualment per a «dominis d'una multiplicitat d'elements» com per a «classes o espècies d'individus, en especial també conceptes, considerats segons llur extensió» (cf.pàg.160), estudia llurs connexions amb els diagrames d'Euler, etc., i per tant esdevé un bon text per al lector interessat en els detalls d'aquestes relacions.

l'esclariment (i digressió), a la circumstància que fa una estructura amb en Joan o la Montserrat que es diferencia, per exemple, de la de dos o tres gats. L'ús d''aquests dos homes', 'aquests quants homes', etc., i l'ús de 'la classe d'aquests dos homes', 'la classe d'aquests quants homes', etc., és el mateix en l'accepció que no sembla haver-hi ha un canvi significatiu important, tot i que usem el mot 'classe' o 'estructura' perquè hi ha una cosa (classe/estructura) que fa una estructura (a un altre nivell) amb una altra cosa (classe/estructura). i, per exemple,

(2) Però res no lleva, sembla, que usem la classe d'en Pere, en Pau i la Maria o la classe d'aquests tres gossos tot plegat a tall de registres, o que pensi lingüísticament que «la classe és els individus aplegats per un qualsevol motiu o aplegats per ells mateixos», és a dir, que mantingui un discurs que no atén afers ostensius i que sols pensa el contingut (lingüístic) lògic, malgrat que segurament els motius per a confiar-me en aquests casos en el contingut (lingüístic) lògic rebi el suport dels afers extralingüístics.

(3) Fem una passa més: essent la nostra capacitat lògica minsa, caldria reconèixer que si haguéssim d'enumerar de fet o en registre totes les coses de les quals volem comentar quelcom l'eficàcia comunicativa i expressiva es veuria prou minvada, ultra que el procediment requeriria ~~el mateix que~~ l'ús genèric i aposicional dels mots: car, no mantenint alhora l'enumeració, hi hauria una afecció ad hoc ~~alterant la seva unitat~~. L'ús no particularitzat dels mots sembla més aviat un prodigiós mitjà expressiu i comunicatiu, del tot vàlid per a alterar les conductes dels altres o per a satisfer possibles necessitats expressives individuals, sense que la capacitat pel genèric remeti a res més que a condicions antropològiques; no es tracta pas que el procediment sigui arbitrari: «els homes» ~~podem~~ po dur a repassar tots els individus humans extralingüístics o registrats que van integrant-se en una estructura, com «l'Estat» em remet als múltiples contactes extralingüístics o registrats amb els ciutadans i els organismes oficials (el lector observarà que sempre cal la seva connivència!), etc. Alhora la sort de les estructures (classes, grups, etc.) és la dels homes, dels gossos, etc.

Tot ~~el que anem dient~~ això és de cap a cap legítim: no hi ha un mal ús del llenguatge en «els homes» (o en «l'Estat») i les úniques dificultats es troben a saber què estem ~~dient~~ fent.

D'altra banda «els homes» no té més intensionalitat que «en Pere és un home», és a dir, el mot 'intensió', com insinuàrem, té un origen en la consideració gramatical de la predicació, afer que no sembla tenir res a veure amb la classe. Quan afegeixo que «els homes» fan una classe indefinida segurament — prenent l'assumpte d'una manera estricta i lògica — hi ha una embrolla entre l'ús de «els homes» i el meu repàs enumeratiu d'individus, que constitueixen les seves respectives determinacions lògiques: el moment final de «els homes» no podent recollir-los si fossin molts (en el cas que en recollís), l'expressió «la classe indefinida» sembla la d'un altre moment que el de «els homes» que per se no és indefinida, car sols ho és el moment final d'una reiteració.

(4) Dèiem que la sort de la classe que hereteix extralingüísticament ~~posada~~ o registrada d'aquests tres homes és la sort d'aquests tres homes, la sort de la classe dels homes és la sort dels homes o, si es vol, la sort de la classe d'aquestes tres coses és la sort d'aquestes tres coses, la sort de la classe de coses és la sort de les coses, havent de tractar aquí «les coses» tal i com tractem «els homes». Però quan comencem a parlar d'estructures/classes/conjunts, etc., sense més, fem amb 'la classe' allò que fem amb 'els homes': «la classe» enclou/l'elecció d' ~~[illegible]~~ una qualsevol classe (aquests tres homes, els homes, etc.). D'altra banda som capaços d'usar l''estructura', la 'classe', com un nom per a diverses estructures o classes, i per això, per tal de salvar l'equívoc, parlem de «classe de classes», que al cap i a la fi és una classe de coses (si voleu: d'infinites coses). Cal reconèixer que, abandonada la posicionalitat extralingüística, es fa forçós un cert domini del llenguatge i del seu pensament (tot i que segurament no ens hi circumscrivim sempre, a un mer pensament lingüístic), alhora que la possibilitat d'errors creixen arreu[32].

(5) Prenguem ara una nova línia: agafem, per exemple, circumstàncies que difícilment puguin rebre una clara ostensivitat com «la classe/les estructures de les ciutats»; si definim ~~una~~ la classe/estructura com l'aplegament d'individus no sembla pas que tot plegat superi massa el fet de ser contiguts (lingüístics) lògics, malgrat fins i tot que poguéssim cercar una certa ostensivitat. Tanmateix l'afer lingüístic és eficaç, per això l'acceptem i si més no el lloc on sóc és Barcelona i puc imaginar-me Sabadell.

Però un punt és allò que no té parts i per tant mai no n'hi haurà ostensivitat; com sigui que un segon punt tampoc no té parts, ni un tercer, ni un quart, etc., admetem de grat que els punts no tenen parts: tot això val tal qual, de manera absoluta, i parlem

[32] És pot tenir la impressió que prou filosofia matemàtica i físico-matemàtica ha esmerçat molts esforços als usos correctes dels pensaments lingüístics. Cal reconèixer sense embuts que aquest camí forma part dels esclariments que ~~la racionalitat~~ la filosofia estudia (el pensament lingüístic és la seva pròpia racionalitat), però la discussió més rellevant no està tant si un terme general no admet excepcions (quan segurament no té aquesta funció) o si hi ha diversos graus d'infinit (que potser es tracta d'una recreació del mateix pensament lingüístic), com, donada la feble consistència racional ~~(com éssers afectats)~~, per què ens hi confiem i d'on s'origina aquesta confiança, afer que ens remet, sembla, a la interacció amb les coses i a condicions antropològiques.

de la classe (conjunt, estructura, etc.) dels punts amb la mateixa normalitat lingüístics que parlem de la classe dels homes. ¿Quants punts hi ha en un espai euclidià? Doncs segurament els que vulguem, amb l'únic requisit que no els puguem comptar perquè «hauran de ser molts». En efecte la definició lingüística de punt, necessàriament anatural, afecta l'espai com a pura pluralitat, ~~malgrat que ni el punt com allò que no té parts i aquest espai pur comprometin ni poc ni molt el coneixement de la natura i les relacions matemàtiques que hi investiguem.~~ → φ.

Es tracta, és clar, d'un exercici lingüístic més dels llenguatges quotidians, amb un valor absolut: és la racionalitat la que l'analitza en so i afecció, i per això cerca les condicions que hi han dut i per les quals, fins i tot així, esdevé útil per a l'exposició de coneixements.

(6) Un dels més espinosos temes sobre les classes és el de l'existència d'un objecte real anomenat 'classe', 'conjunt', 'estructura', etc. «What is "unclear" is whether such objects really exist and, if they do, how we can possibly know what we claim to know about them»[33]. No és clar, entre d'altres coses, perquè no hi ha una resposta absolutament unívoca en la ~~mica~~ qüestió per exemple que l'estructura d'aquests tres homes és de mal comparar amb l'estructura de «els homes», la primera essent quelcom que permet pel cap alt una certa ~~posició~~ inspecció, la segona un ús lingüístic ~~afectat~~. Però sobre aquest assumpte sembla que ha faltat de vegades una mica de bon sentit: pot semblar sorprenent que s'hagi conclòs, amb un cert aplaudiment generalitzat, que els EE.UU. essent una mateixa realitat natural, el fet que els puguem considerar un conjunt d'estats o de comtats implica que la classe és un objecte no físic; sorprèn perquè -- deixant de banda la qüestió de la posicionalitat de quelcom com «els EE.UU.» -- podríem haver après un metre quatrat -- s'obvia una possible reflexió (i digressió) sobre l'ús dels noms en les estructures, i el mateix fet que la unitat del territori dels EE.UU. formaria part més aviat de l'estructura d'estats sobirans. D'una manera més global caldria afegir: per ventura hi ha algun objecte natural que no sigui per això mateix una classe amb un sol membre? 1φ.

D'altra banda el problema de l'existència de classes sembla sovint un pseudo-problema introduït també per motius aliens a les pròpies classes. Circumscrivint-nos al cas de B.Russell dels temps dels Principia, la posició ni a favor ni en contra que hi hagi classes s'originaria segurament perquè una certa lògica formal moderna crea dificultats ad hoc: ¿per què la classe no forma part del nostre «mobiliari últim del món», i.e. no és un símbol

---

[33] Philosophy of mathematics, pàg.31.

definible, una idea primitiva?[34] L'eminent pensador adduiria potser els següent motius: (a) les classes no poden tenir-se com una espècie d'individus perquè llavors cauriem en la contradicció de classes que no són membres de si mateixes (però això sembla un escrúpol logicista); (b) perquè es pot provar que el nombre de classes és més gran que el nombre d'individus (però això pressuposa que la classe no és un individu); (c) una classe no pot ser quelcom purament extensional (el subratllat seria de Russell): la classe buida no té extensió i la classe unitària s'identificaria amb el seu membre (però en aquest cas es podria afegir que aquestes classes són meres ficcións per a simplificar el càlcul[35]); (d) una classe no s'identifica amb una funció proposicional perquè dues funcions proposicionals podrien definir una mateixa classe (però ja diguérem que la intensionalitat no hi tindria res a fer, a més del fet que la identitat entre la classe dels homes i dels mamífers bípedes no sembla que causés greus problemes); (e) les dificultats que es deriven de la teoria dels tipus pel fet de caler fer proposicions sobre totes les classes compostes d'objectes d'un qualsevol tipus lògic .(que semblaria un escrúpol logicista-formalista en la ~~mida~~ mesura que un hom no sap ben bé per què una classe no podria contenir membres de diversos ordres[36]). és clar que no es tracta tampoc de creure que la classe existeix sempre en l'accepció que la determinem ~~[illegible]~~ extralingüísticament (o conceptualment en una manera a legitimar), sinó que basta la inspecció i/o el registre, i la generalització.

(7) Per mor de la simplicitat agafem una nova línia: si una estructura necessita individuar els seus membres i una estructura, en tant que síntesi, és la seva individuació, en el cas de considerar-se que la unitat és, de primer, la cosa, segurament un hom perdria el desig de considerar el nombre des d'altres direccions, mentre que entendria que qualsevol estructura similar a una estructura donada fos numèricament igual. Però si calgués posar-se molt seriós en l'ús de les expressions -- afer no sempre, ni sovint, necessari -- quan considerem que la definició estricta de nombre d'una classe és la classe de totes les classes que són similars a la primera classe (relació un-un), essent la classe de totes les classes una síntesi, es fa veritablement difícil de capir que el nombre d'una classe sigui precisament "cosa" (o «cosa» en el cas d'~~afectar-ho~~ un registre). Com a definició conceptual del nombre d'una

---

[34] cf. Introductio to mathematical philosophy, pàgs.181-193.

[35] cf. Gödel, Russell's mathematical logic, pàg.459~~; per a la classe buida mireu també dalt, pàg.128 (nota 16)~~.

[36] cf. Gödel, loc.cit.

classe sembla realment quelcom escruixidor[37].

(8) Hi ha encara quelcom rellevant: quin profit traiem de bastir una teoria de les estructures? Si no pot fundar l'aritmètica, si més no cal admetre obertament que es tracta d'un ric exercici de pensament lingüístic; no reemplaçarà pas les qüestions més rellevants de la filosofia ni pot prendre cap dret a l'hora d'establir un model de racionalitat, que no té substitut, però la dèria de bastir-se llenguatges artificials i d'ensinistrar el pensament lingüístic és un exponent més de la curiositat de l'home i dels seus afanys per la raó. La teoria de conjunts és deutora per tots costats (no pretén pas justificar-se), però té un espai dins de les disciplines que s'inclinen per la formalització.

D'altra banda la classe és un altre nom per a l'estructura i les relacions entre la part i el tot formen un tros del nostre equipatge racional, i del seu hàbit: els nombres ~~formals~~ abstractes bastint éstructures (independentment ara de l'existència del nombre estructural), la legitimitat d'un llenguatge de classes esdevé la legitimitat d'un qualsevol altre registre lingüístic[38].

(9) Val la pena de recordar que en una classe infinita (o indefinida)(per exemple la dels nombres naturals), l'infinit pertany a l'enumeració reiterada. L'ús de l'expressió 'la classe indefinida' (o 'infinita') és certament una manera de parlar del tot admissible, però revela si més no els usos expressius del llenguatge~~, que s'efecta així quan estem efectuant una síntesi posicional o quan l'afectem per 'la classe'~~. En d'altres paraules: hi ha un contingut (lingüístic) lògic que es pensa, una existència

---

[37] Quan diem que els nombres són independents de les classes no impliquem que els nombres no basteixin classes, sinó que la teoria de classes no és massa útil per a definir el nombre o per a entendre'l: hom pot discutir parcialment l'encert d'un punt o d'un altre dels treballs formalitzats de Peano, per exemple, i acceptar-ne la legitimitat global (en el gran matemàtic italià la classe és sempre una classe de nombres), com sigui que una pluralitat de nombres és una estructura (o una síntesi). Allò que no sembla que puguem admetre és més aviat la comprensió dels nombres a partir de les classes tal i com ho feren Frege, Whitehead, Russell, etc.

[38] Això és, es tracta com a mínim de defensar la correcció del càlcul de classes i de relacions (l'Àlgebra de la lògica o logística) i una gran part de la lògica de relacions, en la línia de Boole (que no vol dir acceptar l'obra de Boole, etc.), Schröder, fins i tot d'una bona part dels Principia Mathematica (fent abstracció dels problemes que hi són incorporats), etc., i alhora el seu ús en una anotació lògica formal (pel cap baix en afers matemàtics) a l'estil, per exemple, de Peano, que no tenint afanys epistemològics representa una exposició lògica simplificada, per tant amb un caràcter marcadament pragmàtic.

lingüística de l'infinit, per tant amb una comprensió necessàriment finita.

§34. Notes finals.

¿Quines són les lliçons que podem extreure després d'haver apuntat algunes notes de la quantificació fregeriana i d'haver esmentat les classes? Potser podríem destriar, entre les coses que s'han anat dient i entre els seus corol.laris i els seus pressupòsits, els punts següents:

1. El fet de trobar en els llenguatges naturals arguments i funcions pren com a base el propi llenguatge; hem après els llenguatges naturals i no tenim cap dificultat de reconèixer-hi estructures lingüístiques que permeten mantenir un mateix subjecte amb diferents predicats, i un mateix predicat per a diversos subjectes. Alhora el llenguatge inclou un pensament lingüístic, pressuposa el fet de saber-lo usar i la consciència ~~(afectada)~~ del que pot ser subjecte o predicat; el fet de suplantar amb una lletra un subjecte i un predicat no és més en principi que aquesta afecció, una resultant de l'habituació del llenguatge, i en això -- com veurem més endavant (§50) -- sí que hi ha un paral.lelisme amb l'àlgebra. Però (1) hom posa una lletra en lloc d'un subjecte o d'un predicat quan s'ha acostumat a posar subjectes o predicats, de tal manera que la lletra és un altre mitjà per a un subjecte o per a un predicat; esdevé indiferent escriure 'Joan' que 'a', o 'és un home' que 'φ', no té més valor, en principi, el primer que el segon: són coses afeccionals ~~afectades~~; (2) això ben establert l'home diferencia les lletres que no són mots dels llenguatges naturals dels mots que sí que ho són, diferencia les lletres (i els mots naturals) de les coses no lingüístiques ~~formals~~, i d'aquí que pugui interpretar les lletres com a noms per a individus i estructures lingüístiques ~~formals~~ i per a individus i estructures no lingüístiques ~~formals~~. S'esdevé que la diferència entre una lletra de subjecte i una lletra de predicat no es correspon més que a diferències entre mots que fan de subjecte i mots que fan de predicat (i mai no a relacions no lingüístiques o als continguts lògics dels nostres registres), i per això les diferències entres dues lletres complementàries és una estructura paral.lela a les diferències entre mots naturals complementaris; tenim una nova mostració que l'ús de lletres imita els mots naturals i no és més que la resultant de l'hàbit lingüístic; si es vol, l'ús de lletres porta al límit l'habituació lingüística, i per consegüent les lletres són la seva pròpia afecció, i en un segon moment poden interpretar-se per la diferència amb mots naturals (i amb coses no formals). Es tracta d'un fet important que no se circumscriu a la lògica simbòlica.

Observi's que la circumstància d'habituar-nos als mots i a les construccions lingüístiques dels llenguatges naturals i la de l'ús de lletres són pràcticament les mateixes. I la «capacitat» de donar nous noms a les lletres o a les fórmules resultants esdevé doncs una previsió humana a partir d'hàbits adquirits: el propi home explora (i explota) el propi fet que l'abstracció[39] és de vegades fruit de l'habituació (sovint un fet estany per a ell mateix), i abstreu (o generalitza) imitant d'altres generalitzacions (i abstraccions) lingüístiques. Hi ha doncs tres línies que hi conflueixen: (1) el fet que l'hàbit lingüístic pot ser generalitzador, abstractor; (2) el fet que l'ús dels noms és un hàbit lingüístic, siguin noms propis o genèrics; (3) el fet que l'home usa també (1) per a fer (2) i fins i tot promou nous noms.

En la ~~mida~~ mesura que l'habituació convida en els contextos lingüístics a una formalització sembla que en qualsevol cas l'abstracció i la generalització o és aquí una formalització per l'hàbit o és una formalització perquè l'home imita (ho ha après) les generalitzacions i les abstraccions anteriors.

2. Més endavant indicarem que les funcions matemàtiques elementals semblen generalitzar en tant que són resultants i ~~no~~ hi ha un domini ~~formal~~ numèric (cf.§50).

Segurament doncs no caldrà insistir ara sobre la possibilitat de generalitzar les funcions (i, en conjunt, les fórmules) matemàtiques seguint diversos expedients. Assenyalem sols que la funció (en un segon sentit) s'aplica aquí com a màxim a coses lingüístiques ~~formals~~, i per això pot servir per als processos de generalització de resultants matemàtiques. En d'altres paraules l'estudi que destria en una fórmula una part en el tot és una possibilitat que de fet no intenta de justificar per què acceptem aquella fórmula, sinó que té els seus propis criteris d'utilitat (generalització, simplificació, ordenació, cerca de nous problemes, etc.)[40].

---

[39] 'Abstracció' en el sentit que l'àlgebra és una ciència abstracta perquè generalitza.

[40] No hi ha necessitat d'interpretar altrament la funció, per exemple, en Peano (cf. Arithmetices principia nova methodo exposita, pàgs.30-31; Notations de logique mathématique, pàgs.126, 137-159; Logique mathématique, pàgs.272-278; Formules de logique mathématique, pàgs.353-355); si més no el gran matemàtic italià no accentua els aspectes predicatius, atributius, intensius, de la funció: un any abans dels Arithmetica principia escrivia: «Una espressione ottenuta operando su d'una classe X e su altre classi che si considerano come fisse, coi segni logici $\cap \cup -$ si dirà una funzione di X, e si indicherà con f(X)», Operazioni della logica deduttiva, pàg.7, que concorda amb l'ús lògic del terme funció per Boole (cf. An investigation of the laws of thought, pàgs.72ss), per Schröder (cf. la desena Vorlesung I, pàgs.396ss.), etc.

En Peano es tracta simplement d'un estudi ~~de formes~~ lingüístic sense més, anàlisi que sempre serà legítima i on ' φ ' treballa com 'funció'

3. Els registres dels llenguatges quotidians permetent reflexions entre les seves parts, la doble possibilitat habitual de generalitzar i d'anomenar permet, com dèiem, la introducció de lletres –– si voleu: de lletres d'argument i de funció, d'objectes i de predicats, etc. ––, la resultant de les quals hauria de rebre un tractament com un qualsevol dels nostres registres, essent-ne certament resultants (si voleu: més generals). L'estudi d'una fórmula com $\varphi(\underline{x})$ hauria de ser (acceptant la <u>seva</u> generalització) del tall de l'estudi dels registres, per exemple, «les coses», «els homes», «tots aquests són homes», «tot això són coses», etc.; i el d'una fórmula com $\varphi(\underline{a})$ de tall de l'estudi dels corresponents registres, per exemple «aquesta cosa», «aquest home», «això és una cosa», «aquest és home», etc.

Una insistència exagerada en les parts d'una fórmula (o en les parts d'un registre) segurament es mou amb ambigüitats i desencamina l'esclariment racional: allò que sigui φ <u>versus</u> allò que és la ics de $\varphi(x)$ o la <u>a</u> de $\varphi(a)$ val tant com allò que sigui «en Pere» i allò que sigui «és un home» a «en Pere és un home»: són afers que entenem gràcies al nostre domini lingüístic, que pressuposa les nostres habituacions de tot tipus, i per això esdevenen plenament útils quan exposem la nostra gramàtica.

Mirem-ho des d'un altre punt de vista: la insistència que la lògica s'hagi de circumscriure a afers gramaticals, això és quan un hom no es limita a presentar els afers gramaticals com a mera introducció <u>en lògica</u> (és obvi que les nostres consideracions respecten de cap a cap l'ús merament gramatical del llenguatge per part del filòleg), <u>ens força a llevar-li la connivència de les nostres habituacions i a obligar-lo a explicitar els implícits</u> segons els següent supòsits: (1) els registres esdevenen <u>meres</u> formes: llavors l'anàlisi de formes ('en Pere' i 'és home', '<u>a</u>' i 'φ') mai no representa un estat de coses no formals ni és una anàlisi d'un contingut (lingüístic) lògic; (2) l'anàlisi de formes mai no ofereix <u>per se</u> la seva sintaxi ('en Pere' i 'és home' <u>versus</u> 'en Pere és home', 'φ' i '<u>a</u>' <u>versus</u> '$\varphi(\underline{a})$'); (3) l'anàlisi de formes és incapaç d'expressar quantificació, car aquesta és en qualsevol cas un ús lingüístic (i no pas l'estudi d'un objecte formal, i.e. el registre «els homes» <u>versus</u> la forma 'els homes').

La utilitat doncs de fórmules del tall de $\varphi(\underline{x})$ i de $\varphi(\underline{a})$ sembla la d'establir un registre més al costat de tots els nostres registres. és possible que s'excloguin amb això prou problemes introduïts pel que podem anomenar 'predicació fregeriana' en una accepció àmplia del mot, i.e. aquella per la qual es té que una funció, una predicació, una intensió, etc., analitza eficaçment <u>la</u>

---

perquè dominem ja les funcions i som capaços de generalització (i formalització); per tant l'ús de 'φ' és una conseqüència dels processos de generalització i és en tant que tal que l'utilitzem.

lògica del llenguatge natural o dels usos d'aquest llenguatge en les coses.

D'altra banda hem pogut també veure en concret que Frege reinterpretà d'una manera conceptual l'anàlisi d'una fórmula matemàtica: mentre cregué que aquesta anàlisi de la funció matemàtica a través d'arguments i funcions fa comprendre precisament la primera (es tracta d'un esquema substitutiu) defensà que aquest esquema esdevé alhora vàlid per a la lògica dels llenguatges col.loquials. Els punts que ara concloem han pres com a referent, és cert, a Frege: tant el caràcter incisiu i innovador dels seus escrits, la necessitat d'una certa presentació d'una escriptura lògico-formal, com les finalitats del present treball, ho demanaven; però el lector observarà que qualsevol altra forma d'escriptura lògico-simbòlica de la quantificació dels llenguatges naturals n'està igualment afectada, usi o no usi els noms d''argument' i de 'funció', per uns motius paral.lels als que s'han establert: s'explora una habituació en la ~~mida~~ mesura que s'accentua el caràcter lingüístic de la lògica, el no reconeixement de la quantificació de predicats no lleva les circumstàncies lingüístiques que els engendren (i engendren les variables), etc.

4. La classe i el fet de pertànyer a una classe pot interpretar-se de dues maneres: (1) la classe és el predicat i el membre es pren de subjecte, i llavors val per a la classe i el membre allò que diguérem a propòsit de la funció i de l'argument; o bé (2) la classe és una síntesi i el membre respecte de la classe s'entén com el pas de l'individu a l'estructura d'individus (síntesi) o des d'aquesta a l'individu-membre (anàlisi): llavors ens trobem davant d'un afer que no respon a una mera anàlisi gramatical i rellevant, resultant de les nostres anàlisis i síntesis en la ~~mida~~ mesura que no se circumscriu al discurs lingüístic, que explora les habituacions lingüístiques quan s'hi circumscriu, que van essent més abstractes en la proporció que es van anomenant els noms (sense que calgui sempre limitar-se a afers ~~formals~~ lingüístics), amb la conseqüent necessitat d'un aprenentatge lingüístic, etc.; en aquesta accepció la teoria de classes descabdellaria un procés paral.lel al que fa l'aritmètica: tanmateix la noció de classe sembla innecessària a l'hora de pensar el nombre (cf. Introducció).

Una relació (en el sentit dels estudis simbòlics) té així mateix les dues interpretacions apuntades: (1) la relació assumeix alguna independència respecte dels termes relacionats, i es tracta d'una discriminació lingüística útil o convertida en una predicació; (2) la relació entre dos o més termes és, simplement, una relació, per tant no se separa dels termes (cf. §2), i llavors la teoria de les relacions es descabdellaria lingüísticament, etc.

En la ~~mida~~ mesura que el lector bandeja el possible constructivisme formal de regles operatives en el càlcul de classes i de relacions, o usa les operacions a la manera del llenguatge quotidià[41] i de les seves generalitzacions (amb una quantificació correctament interpretada), sembla que uns tals estudis facin un genuí càlcul ~~formal~~ a partir de fets ~~no formals~~ no merament lingüístics, i que hi hagi un paral.lelisme amb l'aritmètica. En aquesta accepció la base d'aquell càlcul està prou lluny de tenir un punt de partida formal, tot i que, com la mateixa aritmètica, és possible de valorar-lo a tall de discurs ~~formal~~ lingüístic una vegada un hom només usa llenguatge[42].

5. La crítica del constructivisme de regles operatives i de la predicació fregeriana (entesa com la substitució de la lògica per l'anàlisi gramatical) cal no tenir-la com un rebuig del formalisme (o de la lògica formal en conjunt): al costat de les lògiques simbòliques de classes i de relacions, les lògiques simbòliques de tall aristotèlic i un ús qualsevol d'una anàlisi lògica de les fórmules matemàtiques (que són resultats) esdevenen instruments sovint insubstituïbles.

Alhora les resultants matemàtiques que s'analitzen han tingut la seva pròpia generalització i formalització que caldrà estudiar cas per cas i d'una manera independent del simbolisme lògic que les analitza per a d'altres finalitats (de claredat expositiva, de simplificació, etc.).

---

[41] Noti's que l'ús de la negació en una teoria de conjunts és en principi com qualsevol altra negació lingüística, i per això tot allò que no és tal rep el nom de 'no-tal' (com un diagrama fa veure amb facilitat)(cf.per exemple la setena Vorlesung de Schröder vol.I, pàgs.299-341 per al càlcul de classes, vol.II, pàgs.58-59 per al càlcul d'enunciats). Per cert que en les Vorlesungen el condicional, la conjunció i la disjunció (inclusiva) es porten sols a col.lació en tant que la subsumpció, el producte (lògic) i la suma (lògica) de classes (d'enunciats vertaders o falsos) poden ser interpretats així (cf.per exemple vol.II, pàgs.1-24; per a la lògica de les relacions binàries cf.vol.III, pàg.1-16): malgrat l'origen d'unes tals classes per la veritat i la falsedat d'enunciats, som davant d'una lògica extensiva i que reconeix que les estipulacions que necessita no són les del llenguatge quotidià.

[42] Essent la teoria de les estructures i la disciplina ~~formal~~ aritmètica resultants, llur constitució ens fa adonar que la lògica de classes i l'estudi numèric són, els dos, les consideracions de síntesis i d'anàlisis (amb les seves individuacions), però amb l'afegit que l'aritmètica hi va incorporant els noms dels nombres, fet del tot rellevant pel qual en principi cada individu té un nom; l'aritmètica que es va constituint és doncs la seva pròpia teoria estructural, i en aquest punt no hi ha res capaç de reemplaçar-la, això és, que tingui com a resultants les resultants aritmètiques; la mateixa àlgebra generalitza les resultants aritmètiques ~~formalitzades~~, no pas la seva teoria estructural per la qual l'admetem.

PART SEGONA

Esbossos per a les disciplines matemàtiques elementals

Amb els advertiments metodològics de la primera part podem abordar algun esbós elemental de les nostres disciplines aritmètiques i geomètriques. Caldrà tenir cura de nocions com quantitat, unitat i nombre, mirarem si és possible d'entendre correctament algunes resultants de l'aritmètica a partir d'uns tals pressupòsits i farem un esment especial del que entenem per formalització en l'estudi dels nombres i del seu càlcul.

Ara bé l'estudi de les anomenades geometries no-euclidianes s'arrela, sembla, en el domini de la geometria euclidiana, i per això n'exposarem alguns punts sense ànim d'exhaurir-ne el contingut. A més l'obra d'Euclides tindrà per a nosaltres un sentit instrumental en tant que ens cal alguna avaluació del mètode demostratiu, de la deducció des de principis, d'aquests mateixos principis i, en acabant, de l'objecte de la pròpia geometria, això és, caldrà també oferir alguna resposta a la pregunta següent: de què tracta la geometria elemental euclidiana? Des d'aquí serà segurament més fàcil d'entendre el pas cap a d'altres geometries, i ho exemplificarem amb unes notes sobre la hiperbòlica, d'acord amb el descabdellament dels nostres esbossos, que no pretenen arribar ni a la geometria analítica.

I

APUNTS PER A L'ARITMÈTICA BÀSICA

Hem vist que els registres contenen la seva pròpia informació lògica, que els dominem i que també pensem amb ells: la circumstància de no conformar-nos-hi en alguns afanys de la ciència (i en alguns casos) no rau doncs que sovint no bastin quan hom podria llegir quasi tot el que exposarem com a mer registre, sinó en la circumstància que també explorem afers extralingüístics per tal, per exemple, de reblar-ne l'ús com a registres, fins i tot al marge que aquella activitat val d'una manera absoluta com a activitat racional, i que pugui esdevenir mer registre per a un mateix: però és que en alguns casos que ens poden interessar el contingut lògic lingüístic «reflecteix» un afer extralingüístic (i el d'altres és mer ordre lògic lingüístic).

Llavors l'aritmètica constituint una de les disciplines matemàtiques més antigues, no cal ponderar la importància de qualsevol estudi sobre els nombres, i d'alguna manera es podria dir que l'avaluació d'una racionalitat té en aquesta disciplina una pedra de toc. Posarem doncs fil a l'agulla encoratjats pel mateix fet de la seva antiguitat i del seu rigor.

§ 35. La quantitat i la relació «més»/«menys».

1. Començarem amb algunes notes terminològiques: els plurals usos de mots com 'quantitat', 'més', 'menys', valent d'una manera absoluta, hauríem de cercar potser la manera de fer possible l'abast d'una significació no merament lingüística per a algun ús d'aquells mots, i ~~merament~~ sols com un excurs que no vol substituir-ne els altres usos; car per exemple anomenem sense problemes 'quantitat' queicom com

(1) ______________________________

és possible que un bon camí per a explicar en el nostre exemple l'ús del mot 'quantitat' es trobi en el fet que hi ha parts en (1); adonem-nos si més no que la mera consideració d'una part de (1) deixa l'afer tal qual, en la ~~mena~~ mateixa que ens trobem en el començament: una mera part de (1) ens obligaria a formular les mateixes preguntes que adrecem a (1). Llavors no podem pas creure que (1) sigui una quantitat pel fet que hi puc aïllar part rere part: sense abandonar la consideració de parts en la quantitat, sembla que hauríem de decantar-nos a creure que la quantitat (aquí) pressuposa més aviat el tot de (1) i que precisament perquè posem en relació la part d'un tot respecte del tot on entra puguem usar (aquí) el mot 'quantitat'. Aquest ordre de discurs establiria per tant que la quantitat (aquí) és la relació de la part al tot on està inclosa.

D'altra banda la circumstància que el mot 'quantitat' pugui usar-se per a una relació entre la part i el seu tot, però que no sempre tendim igualment a esmerçar-l'hi, sembla revelar que ens reservem aquell mot quan ens interessa de remarcar no una part, sinó les plurals parts d'un tot, però això sols és possible per l'afecció lingüística i comportamental d'una història lògica (de parts) o/i el corresponent tot: la distinció aristotèlica de la quantitat contínua i de la discontínua ho assenyala segurament (al marge ara de l'encert d'aquesta distinció), per la qual cosa potser és sensat de concloure que no cal circumscriure l'ús del mot 'quantitat' a la relació d'una part amb el seu tot com sigui que es pressuposa ja l'<u>afecció</u> d'una història lògica (de parts), que pot recaure pels mateixos motius en el tot; llavors un tot rebria el nom de 'quantitat' en tant que -- i seguint amb això un comportament lingüístic -- ha rebut una anàlisi de parts o n'és susceptible.

L'ús dels mots 'més' i 'menys' sembla prou emparentat (aquí) amb el de la nostra digressió del mot 'quantitat': en una accepció 'més' s'usaria quan atenem un tot respecte de la part o de les parts que l'integren, aquell tot no essent -- o no havent de ser sols -- justament aquestes parts: 'més' s'empraria aquí per a un terme de la relació entre el tot i les parts (o la part) seves, i precisament per al del tot, l'altre terme prenent el nom de 'menys': tindríem, per exemple, «més gran», «més ample», etc.

Alhora en una segona accepció usaríem 'més', sembla, per a allò que no s'integra en un tot però que ha de constituir amb ell un altre tot, i 'menys' per a la part d'un tot que es vol desconsiderar per tal de tenir les restants parts d'aquell tot com un nou tot: tindríem, per exemple, «aquests homes més aquest i aquest altre», etc.

Les relacions entre un tot i les seves parts permeten també d'altres usos de 'més' i de 'menys': el mot 'més' pot reservar-se així mateix per a la part respecte del tot, el tot essent ara menys: tindríem, per exemple, «més curt», «més petit», etc.

Circumscrivint-nos a la primera accepció de 'més'/'menys', podríem dir que l'ordre de consideracions per les quals usem (aquí) el mot 'quantitat' i els mots 'més'/'menys' semblen ben bé les mateixes: car si la quantitat és qualsevol tot en tant que és la resultant d'una anàlisi o n'és susceptible, la relació més/menys sembla sols que expliciti precisament la relació entre el tot i alguna(es) de le seves parts.

Fent-ho ara per a la tercera accepció ens adonem que s'hi explicita també la relació d'una part a un tot.

El lector entendrà que mots com 'quantitat', 'tot', 'part', són mots-jòquer (cf. §12), útils ad hoc, cosa que no implica pas que no expressin afers lògics de la màxima importància. A més sovint els acompanyem d'altres noms que en precisen l'ús (sobretot en l'exposició a un tercer): «tot el magatzem», «una quantitat d'homes», etc. Respecte de mots com 'més', 'menys', sembla que la llengua ens obligui a circumscriure la referència (usats com a substantius serien mots-jòquer) per mitjà d'adjectius, prou dels quals no són mots-jòquer («més gran», «més petit», etc.), per més que n'hi ha que sí que ho són («més estructurat», etc.).

2. Observi's que en totes les comparacions el ~~terme que és~~ mot «més» pres en la primera accepció ~~ha de ser~~ s'usa per a un tot: que el segment (2) sigui més llarg que (1) ho sabem directament per la mera

(1)
(2)

inspecció de (1) i (2); ~~el~~ 'més' ~~és~~ s'usa aquí per a (2) com un tot i no val la pena de tenir-ne cap dubte ni d'explorar cap altra relació. Però en

(3)
(4)

hem d'inspeccionar que (4) tingui una part igual a (3) i que n'hi hagi un restant: parlant estrictament (4) és més llarg que la part igual a (3) que conté; fet i fet tampoc no ens interessaria de saber directament que (2) és més llarg que (1) si no fos cert que (2) és més llarg que una part seva igual a (1).

En canvi quan prenem el mot 'més' en la tercera accepció, llavors és el terme que és menys el que s'ha de prendre com un tot i en paral.leles circumstàncies al que acabem de dir[1].

§ 36. La unitat concreta.

Havent-nos d'endinsar en els afers numèrics sembla imprescindible una certa clarificació de l'ús del mot 'unitat', un ús si més no garantit prèviament i malgrat una explicació posterior. Però l'explicació se circumscriu en qualsevol cas a introduir diferència, i en el dibuix que segueix

diem que hi ha ~~un segment~~ una ratlla sense ser-nos massa fàcil de diferenciar

[1]Els usos de 'més' i de 'menys' són certament molt plurals i no prentenem pas d'esgotar llur estudi: sols apuntem doncs allò que potser serà útil per al nostre treball; per a l'ús de 'més' en (per exemple) «més blanc», cf. § 8.

allò que fa que el dibuix sigui una <u>ratlla</u> i allò que fa que sigui <u>una</u> ratlla.

Podent alterar lliurement l'exemple, 'un' i 'home, 'un' i 'cub', 'un' i 'vermell', etc., serien dos noms diversos per a l'home, el cub, el vermell, etc., que estem considerant, de tal manera que la unitat seria aquest home, aquest cub, aquest vermell, etc., i caldria admetre (1) que hi ha un ús equívoc del mot 'unitat', talment com usem el mot 'nina' per a la nina dels ulls i per a la nina de jugar: en un cas seria el nom per aquest home, en un segon cas per a aquest cub, etc. (2) Havent-hi el corresponent paral.lelisme en totes les llengües sembla que hi hauria d'haver més aviat algun motiu en aquest home, en aquest cub, en aquest segment, en aquest vermell, que possibilités l'ús comú del mot 'unitat'.

En efecte la presència d'alguns mots de la llengua duia, en llur racionalització (§§7ss), a l'establiment de comparacions i d'estructures lògiques: mentre l'ús del mot 'ratlla', 'rectilínia', 'negra', etc., <u>en vistes del dibuix de dalt</u> a penes hi introdueix diferències no formals, la diversitat de mots pot remetre (racionalitzant l'afer) a comparacions i a la pluralitat d'estructures; alhora admetérem l'esmerç del mot 'cosa' per a qualsevol individu: fet i fet el dibuix de dalt és cosa, individu, ens, etc., sense que hi varii gairebé res; podria semblar doncs que l'expedient més a mà fóra la introducció d'un nou ~~nom~~ mot, el d''unitat', com un nom ~~propi~~ de cosa a partir de la qual una altra tindria un nom nou. En d'altres paraules, la ratlla de dalt seria <u>una</u>, la següent tindria un altre nom, etc.: el mot 'un(a)' enclouria la seva pròpia afecció lingüística <u>ad hoc</u>.

Provisionalment admetríem per tant que podem usar el ~~nom~~ mot 'unitat' allí on usem el nom 'cosa' o 'individu'. Però aquesta ratlla, aquest home, aquest cub, aquest vermell són individus, coses: si reben el nom 'ratlla', 'home', 'cub', 'vermell', perquè la racionalització ens duu als corresponents estudis, i àdhuc podríem admetre que tots basteixen una estructura de coses, els factors afeccívols (ho hem après) que ens fan anomenar això

'ratlla' o 'cosa' no semblen llevar que quasi no hi introdueixo, ~~en~~ amb això, diferència; no semblen llevar que la decisió (i afecció) d'esmentar-lo com a 'ratlla', com a 'cosa', o com '<u>una</u> ratlla' no en modifica a penes la lògica posicional: la racionalització del nom 'un' a 'una ratlla' no passaria necessàriament i només per l'ús del mot 'ratlla', sinó també per l'ús del mot 'un', i nosaltres <u>hauríem après</u> els usos dels ~~noms~~ mots; no hauria calgut que haguéssim après el nom 'cosa-ratlla' per la seva inutilitat, però seria prou útil 'una ratlla' a l'hora de poder anomenar una segona: és que, així com hi ha una afecció en determinar-hi "ratlla" (si més no hi ha un nom après), també n'hi ha en determinar-hi "justament una" (<u>idem</u>).

Alhora la diferència de mots ('cosa', 'unitat') provindria aquí de l'activitat a fer, palesant que la racionalització dels usos d'alguns mots no duu sols a les comparacions i a les estructures plurals, sinó a una diferència (afeccions) de propòsits, revelant alhora que dominem les afeccions per les quals diferenciem els usos dels mots.

No sembla exaçte d'afirmar què la unitat depèn del concepte: la forma 'CASTELLÓ' és una o s'analitza en 'C','A','S','T','E', 'L','L','O', on comptem vuit; precisament fent-ho (simplificant l'afer), 'CASTELLÓ' s'esmenta com a 'paraula', i 'C','A','S','T', 'E','L','L','O' com a 'lletres'; llavors es podria dir pel cap alt que l'individu primer té un nom en 'paraula', i els altres en 'lletra', però no sembla haver-hi una causalitat entre el concepte i la unitat en la mesura que evitem la confusió entre les reflexions que individuen, les reflexions que relacionen, l'estudi dels individus i els noms amb els quals els anomenem[2].

D'altra banda el fet que 'unitat' sembla un altre nom per a l'individu permet avançar aquí (tot i que s'hi introdueixen afers a tractar més avall) que un continu linial ha de tenir la mateixa potència que la sèrie dels nombres naturals; (1) Cantor defensà, és cert, la següent proposició per a negar que la potència (i.e. el nombre cardinal) d'un conjunt de punts linials d'un interval constant, continu (això és, el conjunt de punts, les abscisses dels quals són $\geqslant 0$ i $\leqslant 1$) sigui la potència del conjunt de punts enumerables (abzählbaren) infinitament, potència que té com a representant la sèrie numèrica natural: «tingui's una sèrie infinita simple

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu \ldots$$

[2]L'objecció que la unitat no és una tal individuació delimitadora perquè ho podrien fer també els animals (la unitat provindria de les «més altes forces de l'esperit humà») no sembla massa seriosa en la mesura que hi és en joc la mateixa capacitat determinativa de l'home; ben segur els animals delimiten coses, però no es tracta sols de delimitar, sinó dels seus trets, segurament incomparablement més rics en l'home que en qualsevol altre animal, ultra que és possible que hi pugui haver una certa equivocitat entre la delimitació d'un animal i la d'un home.

de nombres reals, no iguals, que progressa segons una qualsevol llei; llavors en cada pretès interval (α ... β) es dóna un nombre h [que és real] (i per conseqüent infinitament molts d'aquests) que no ocorre en aquella sèrie (com a membre seu)»[3], però segurament caldria argumentar contra l'ús de límits en la prova que ofereix[4]. (2) El motiu que faria establir una mateixa potència entre la sèrie dels nombres i el continu és prou senzill: allò que discriminem en el reconeixement (o en l'afecció) d'un continu duu precisament a noves unitats. (3) Notem que la infinitud de la sèrie numèrica s'assembla prou a un etcètera, que cal no confondre la infinitud de la discriminació d'una unitat ~~(la reiteració d'una operació)~~ amb l'infinitud del compte, i que la suma de les dues sèries numèriques infinites que corresponen a les dues parts d'un continu no faria sinó una sèrie infinita (hi hauria sols un etcètera)[5].

---

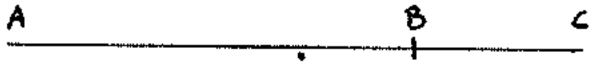
[3]Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, pàg.143: la prova es troba a les pàgines 142-145; per a l'afirmació explícita que la sèrie natural no és d'igual potència que el continu, cf.també pàgines 151-152;192-193.

[4]Malauradament no podem estendre'ns en l'elucidació d'aquest punt: pressuposaria haver de descabdellar l'estudi dels límits en general, que serà objecte d'un proper treball, quan encara cal considerar la simple sèrie dels nombres i un primer estudi geomètric, fites del present treball.

[5]Adverteixi's que la nostra diferència d'infinits és pel tema que tenen, i no té cap punt de contacte amb els infinits propis i impropis de Cantor (cf. Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, pàgs.165-167). Sembla que, al costat dels treballs de Frege, poques coses hagin desenfocat tant la comprensió de l'activitat lògica i matemàtica com la teoria dels nombres transfinits; Cantor no circumscrivint-se a l'activitat matemàtica de bastir la teoria d'aquells nombres, llur comprensió o, millor, llur presentació epistemològica fou pel cap baix poc afortunada en la ~~mida~~ mesura que ho féu en termes d'«existència» i d'una visió prou idealitzada del coneixement humà (i de les matemàtiques) (cf.ibidem, pàgs.171-183). Deixant aquestes ~~més aviat bàrboles~~ digressions, val la pena de recordar que ni Brouwer ni Hilbert acceptaren els nombres transfinits (de l'últim recomanem d'una manera especial el seu molt interessant article Über das Unendliche; les dificultats per a provar la no contradicció del formalisme de la teoria numèrica i la fonamentació de l'anàlisi, però, li haurien potser fet acceptar alguna mena de «transfinita inducció» del tall de Cantor a través de mètodes finits, cf. Grundlagen der Mathematic I, pàgs.32-44; II, pàgs. 360-374 i la introducció de Bernays); sense entrar en els conjunts de Cantor, sembla que si ω fos una sèrie infinita, llavors $\omega+1$ (fins i tot suposant que és un nombre ordinal) seria l'exponent d'un mal ús lingüístic, pel fet que caldria pressuposar que no s'ha considerat

§ 37. Els noms de les coses. El nombre aritmètic com a nombre concret.

Passem ara als plurals noms de les coses en el compte. En el dibuix



tenim AB com a cosa (i segment) i BC com a cosa (i segment): un hom individua AB o individua BC; tornem-hi: un hom determina AB i després BC, però de fet hi ha la reflexió de llur relació i les reflexions dels respectius individus; i podem determinar, per exemple, que tant l'un com l'altre s'integren en AC, això és, que hi ha una síntesi (on l'anàlisi descobeix els individus corresponents i llur relació); en poques paraules: hi ha una estructura.

Precisament els dos camins empresos, (1) el segment AB i després el segment BC, (2) la relació de segments AB i BC i la síntesi (estructura) AC, són les històries lògiques la determinació de l'afecció de les quals dominem, domini que s'exemplifica en l'ús dels mots ~~noms~~.

En aquest punt és prou difícil d'esbrinar quins noms s'originaren primer, si aquells que anomenen cada cosa quan ja han rebut nom les anteriors o aquells que anomenen l'estructura.

---

tota la sèrie (cf.p.e. L.Brunschvicg, Les étapes de la philosophie mathématique, pàgs.524-537): com diem, la comprensió de l'infinit a tall d'un etcètera impediria que el fet d'afegir-hi una unitat ens dugués precisament més enllà d'un etcètera. A més, i de manera concomitant, l'existència de l'infinit recobreix la concepció dedekindiana de l'irracional (que Sols ~~no~~ sembla ~~pas~~ acceptable com a presentació de resultats ~~...~~) que Cantor ja estudià en l'obra que citem i que d'altres seguiren (recordem l'axioma de l'infinit dels Principia mathematica: per a una consulta ràpida basta una lectura del llibre de Russell Introduction to mathematical philosophy, pàgs.131-143; per a la famosa definició dedenkindiana que un sistema s'anomena infinit «wenn es einem echten Teile seiner selbst ähnlich ist», cf. Was sind und was sollen die Zahlen?, pàgs.342,356-359). El lector observarà que els entrellaçaments són considerables, i que prou actituds semblen revelar potser un excessiu entusiasme sincrònic de la lògica i de les matemàtiques (que són resultants) en detriment de la diacronia individual i històrica. D'altra banda un motiu per a tractar d'una manera distinta la concepció de les geometries no-euclidianes i els nombres transfinits prové precisament dels seus orígens: en les primeres canviem les estipulacions, moltes de les quals són logicament donades d'una manera no sols ~~...~~ lingüística (partim doncs de quelcom convingut ~~...~~), en els segons no hi ha hagut un aprenentatge no sols lingüístic ~~contingut lògic~~ de partida per això.

Però sembla que -- i sense entrar en l'afers etimològics -- la possibilitat de la discriminació dels noms de les estructurs ha de provenir de les individuacions successives dels seus elements. Sigui com sigui hom ha donat de fet (en les nostres civilitzacions) nom a cada individu i ha donat nom a les estructures corresponents.

Els diferents noms establint una relació, la relació numèrica, cada terme és un nombre. El nombre doncs seria un nom, el qual s'usa en afers extralingüístics: per això la circumstància que cada terme d'aquella relació s'esmenti com un nombre es pot entendre així mateix com el fet que 'nombre' és un nom per a un qualsevol dels termes no lingüístics. Per això hi ha una ambigüitat en el mot 'nombre': perquè "el nombre" pot determinar allò que s'anomena, i.e. el sentit de 'el nombre' ser allò anomenat per un nom (quelcom estructural o no) -- o "el nombre" pot determinar el nom corresponent, i.e. el sentit de 'el nombre' ser nous mots. Cal saber doncs constantment què es determina.

En el cas de determinar l'individu (estructural o no) que no és un nom usarem doncs l'expressió 'nombre concret': mentre l'oportunitat de l'ús de 'nombre' s'origina sens dubte per la reflexió lingüística, "nombre concret" determinarà aquí l'individu corresponent[^].

Llavors, i si més no en català, sembla que usem indistintament 'el primer segment' i 'el segment u', 'el segon segment' i 'el segment dos', 'el tercer segment' i 'el segment tres', etc. (o 'l'u', 'el dos', 'el tres', etc., usats per a segments), on tenim que usem 'dos' com a nom propi d'una cosa quan ja hem usat el mot 'un', 'tres' quan ja hem usat 'dos', etc.; un tal expedient no ens fa abastar res més que aquesta cosa o aquella cosa, però el seu aprenentatge, això és, el seu ús en determinacions no formals conté l'afecció lingüística d'una història lògica: en determinar "el segment un", "el segment dos", etc., la mateixa determinació rep el nom de 'comptar' (l'explicaríem per la comparació amb d'altres activitats) i el "compte" és precisament l'acció d'"el segment un", "el segment dos", etc. (per tant "comptar" i "compte" determinen -- quan no són registres -- un moment amb una afecció lingüística i, en conjunt, comportamental).

L'únic requisit del compte rau en la diversitat dels noms per a les coses: si una cosa té per nom propi 'mil cinc-cents quinze', la cosa del costat tindrà, per exemple, el nom 'mil cinc-cents setze', la determinació sols abastant "la cosa mil cinc-cents setze" i alhora contenint l'afecció lingüística d'una història lògica (remetem a l'aprenentatge i a la memòria de les formes

---

[^]La doble possibilitat d'anomenar formes lingüístiques i d'altres significacions (lingüístiques i extralingüístiques) no lleva que en cap cas el nombre aritmètic no pot ser una mera forma lingüística (malgrat que les formes hi entrin òbviament en consideració): car, ho veurem, allò que fa que una forma lingüística sigui nombre aritmètic és el seu ús.

lingüístiques[7]). Un tal requisit no lleva -- i més aviat pressuposa -- que l'origen dels plurals noms rau en una història (individual i col.lectiva) que remet a l'experiència de comptar i de les estructures numèriques (cf. § 42).

Agafant ara una altra direcció podríem dir que qualsevol cosa pot rebre el nom 'unitat' com sigui que qualsevol pot iniciar el compte: una estructura de coses és doncs una estructura d'unitats, fet que permetrà de concebre el nombre estructural a partir de les unitats.

L'aprenentatge de prou d'aquells noms ('un', 'dos', 'tres', etc.) per a cada simple individu serveix alhora en català d'aprenentatge de noms per als individus-estructures: mentre val sempre que l'abast lògic de la síntesi és en qualsevol cas limitat, també és cert que en

I I I I I I I I I I

el pas del traç dos a dos traços implica sols la diferència amb el primer traç i llur síntesi mentre els noms contenen l'afecció lingüística de la història lògica del compte (traç u, traç dos); el pas del traç tres a tres traços implica sols la diferència entre el traç tres i els altres traços i llur síntesi mentre els noms contenen l'afecció lingüística de la història lògica del compte (traç u, traç dos, traç tres) o el compte del tercer traç segueix l'afecció lingüística de la història dels dos traços...; el pas del traç deu als deu traços implica sols la diferència entre el traç deu i els altres traços i llur síntesi mentre els noms contenen l'afecció lingüística de la història lògica del compte (traç u, traç dos, traç tres, traç quatre, traç cinc, traç sis, traç set, traç vuit, traç nou, traç deu), etc. és sabut que en el cas dels nombres concrets (d'estructures) emprem els substantius plurals després dels nombres; mentre els registres expressen llur propi pensament, l'ús no merament com a registres dels mots remet a individus, que són estructures, que s'analitzen en aquest traç, en aquell altre, etc.[8]

---

[7]Observi's que el mot 'aprenentatge' és un nom d'activitats específiques: no té valor explicatiu quan un hom està aprenent, en gaudeix quan registra que hi hagué un aprenentatge o se'l representa per més que sens dubte hi ha en aquest cas prou afecció. Per la seva banda la memòria sembla o bé un mer registre o bé una recreació afeccívola. En qualsevol cas el compte (en qualsevol accepció del mot 'compte') té un valor absolut.

[8]Observi's que allò que tenim (més aviat per consideracions lingüístiques) com a «nombre ordinal» s'usa també en formes plurals, però en aquest cas no hem après a quants individus correspon. D'altra banda té raó L.Brunschvicg (malgrat el tipus de llenguatge que usa) quan defensà que «no hi ha ni nombre merament

Tot això ben après el lector podrà admetre amb facilitat que un hom passa directament del compte al nombre estructural, o que el compte duu immediatament al nombre de coses (hi ha hagut un aprenentatge i la nova conducta supleix les obvietats lògiques); alhora, per a esmentar-ne el nombre -- i per uns motius semblants --, no caldrà atalaiar la síntesi de totes les coses que es van comptant, etc.: es tracta en tots els casos d'una <u>conducta</u>, del domini del compte i del nombre de coses, etc.

§38. <u>El nombre aritmètic com a nombre abstracte</u>.

Tant per als nombres concrets d'individus («el segon home», «l'home dos»), com per als nombres concrets d'estructures («dos homes»), hi ha una sèrie de noms-nombres que s'usen per a plurals coses: 'dos homes' al costat de 'dues llances', 'el segon home' al costat de 'la segona llança', etc., alhora que els usem així mateix com a registres.

Llavors anomenem 'nombre abstracte' cadascun dels registres que usen noms numèrics i que els pensem amb independència, no sols d'afers no lingüístics, sinó àdhuc sense la companyia de mots com 'home' o 'llança'; nombres abstractes són, per exemple, 2, 15, etc.

<u>ordinal, ni nombre merament cardinal. Una col.lecció que es dóna en bloc a la percepció com un tot indivisible no és un nombre; no esdevé un nombre sinó quan es distingeixen els diferents elements per a ser enunciats, això és quan l'esperit és capaç de fixar-se successivament en cada unitat. I a la inversa, una sèrie d'unitats que desfila davant l'esperit no esdevé nombre sinó quan s'assigna un rang a cada unitat, això és quan intervé el pensament per tal d'introduir en la idea de la unitat que passa la idea de les que han precedit, quan pot convertir per conseqüent la successió en simultaneïtat. El rang de la sèrie i la xifra de la col.lecció podran utilitzar-se, l'un a part de l'altra, en els judicis ulteriors quan es tracti de passar del domini de l'aritmètica a les aplicacions empíriques que comporta, quan calgui determinar el lloc d'un element en un sistema ordenat o fixar la part dels elements en un grup donat. Però si sols es vol retenir la concepció científica per desenvolupar-ne integrament el contingut i definir-ne el principi, llavors és impossible de separar l'ordinalitat i la cardinalitat -- la sèrie dels actes successius pels quals l'esperit recorre cadascun dels elements, i la síntesi que arreplega aquests actes diversos en la unitat d'un objecte intel.lectual. Un signe com 5 bastarà per a expressar la noció numèrica; però caldrà traduir-lo explícitament per una fórmula tal com:</u> primer <u>i</u> segon <u>i</u> tercer <u>i</u> quart <u>i</u> cinquè, <u>això fa</u> cinc. <u>La captinença característica del pensament encara és aquí una relació de correspondència: la correspondència entre la repetició de l'operació enumerativa i la representació de la col.lecció així formada»</u>, <u>Les étapes de la philosophie mathématique</u>, pàgs.478-479.

Aquí 'nombre' és el nom per a un terme formal que conté la seva pròpia afecció lingüística (no és una mera forma); l'afegit 'abstracte' implica que el determinem així. Per tant "nombre abstracte" determina, per exemple, 2.

§ 39. El nombre aritmètic com a nombre estructural.

El domini dels nombres abstractes ens permet anar escrivint

1, 2, 3 ,4, etc.

amb el benentès que aquí hi ha una sèrie de nombres abstractes en tant que dominem l'ordre, que sabem que 4 va després de 3 i abans de 5, no en tant que considerem l'extensió de

1, 2, 3, 4, etc.

Això és, hi ha sèrie numèrica abstracta en la mesura que no hi ha una estructura lògica (quan usem el mot 'estructura' per a una síntesi), sinó l'exercici del llenguatge numèric abstracte, i trobem certament una relació de nombres abstractes entre dos qualssevol nombres abstractes quan usem així els mots numèrics. Per tant el mot 'sèrie' s'usa per a un exercici fet (o a fer), però no per a la resultant extensiva d'un tal exercici.

Cal diferenciar tot això doncs del fet que puguem usar '2' com a nom per a

1, 2

que s'analitza en determinacions de formes lingüístiques dels nombres abstractes i llur diferència; és clar que quan usem '2' per a anomenar aquella estructura no l'usem pas com a nombre abstracte, sinó que "2" és aquí un nombre concret, que compta efectivament

1, 2

i per tant és un nombre concret estructural (l'anomenem 'nombre estructural' d'una manera simple perquè compta formes numèriques). Tenim doncs també els nombres estructurals 1,2,3,4,5, etc, determinats

1
1, 2
1, 2, 3
1, 2, 3, 4
1, 2, 3, 4, 5
etc.

D'aquí que en

1, 2, 3, 4, 5, etc.

hi hagi l'equívoc de considerar una simple sèrie de nombres abstractes o una sèrie (en l'accepció d'un exercici ordenat) dels nombres estructurals 1, 2, 3, 4, 5, determinats de la següent manera:

1
1, 2
1, 2, 3
1, 2, 3, 4
1, 2, 3, 4, 5
etc.

cadascun dels quals és també una <u>sèrie</u> de formes numèriques.

D'altra banda en qualsevol instant puc reemplaçar una forma numèrica per una altra forma, mentre consideri que és una forma ordenada o que n'és un equivalent. La forma numèrica ens assebenta del lloc que ocupa en el tot estructural perquè pot usar-se com un nombre abstracte; però hi ha un perfecte paral.lelisme entre la sèrie de les formes numèriquess i l'extensió d'una semirecta, com en

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...
_____________________________ . . . . . .

Hem de començar a entendre seriosament que l'estructura de les formes numèriques és extensiva[7].

---

[7]P.Benacerraf té doncs també raó quan diu: «<u>per això defenso, estenent l'argument que aconduïa a la conclusió que els nombres no poden ser conjunts, que els nombres no són de cap manera objectes: perquè no hi ha més raons per a identificar un nombre individual amb un objecte específic que amb un altre (no sabut prèviament que és un nombre).</u>

<u>La futilitat de tractar de determinar quins objectes són els nombres deriva doncs directament de la futilitat de fer qüestió d'un nombre individual. Per als objectius aritmètics les propietats dels nombres que no tenen el seu origen en les relacions que hi ha entre els uns i els altres en virtut de trobar-se arranjats en una progressió no gaudeixen de cap importància. Però serien sols aquestes propietats les que singularitzarien un nombre com aquest objecte o aquell altre.</u>

<u>Per això els nombres no són de cap manera objectes, perquè en donar les propietats (això és, necessàries i suficients) dels nombres tu sols caracteritzes una</u> estructura abstracta -- <u>i la distinció rau en el fet que els "elements" de l'estructura no tenen més propietats que les que els connecten als altres "elements" de la mateixa estructura. Quan identifiquem una estructura abstracta amb un sistema de relacions (en intensió, naturalment, o si no amb el conjunt de totes les relacions en extensió isomòrfiques a un</u>

§ 40. Sobre l'axiomatització formal.

Havent après els nombres i dominant-los, l'ús de mots numèrics es té com un fet sense problemes, i la formalització axiomàtica n'és una presentació a partir d'unes tals circumstàncies. L'axiomatització de Peano n'és un cas a partir de tres nocions bàsiques (0, nombre, successor) i cinc proposicions («0 és un nombre», «el successor d'un nombre,és un nombre», «dos nombres no tenen mai el mateix successor», «0 no és el successor de cap nombre», «qualsevol propietat que pertany a 0 i al successor d'un nombre que té la propietat esmentada, pertany a tots els nombres»). En aquesta accepció són curioses les paraules de B.Russell quan escrigué: «una sèrie de la forma

$$x_0, x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$$

---

sistema donat de relacions), aconseguim que l'aritmètica elabori les propietats de la relació "menys-que", o de tots els sistemes d'objectes (això és, estructures concretes) que exhibeixen aquella estructura abstracta. D'altra banda que un sistema d'objectes exhibeixi l'estructura dels enters implica que els elements d'aquell sistema tenen algunes propietats que no depenen de l'estructura. I ha de ser possible d'individuar aquells objectes independentment del paper que tenen en aquella estructura. Però això és precisament el que no es pot fer amb els nombres. Ser el nombre 3 no és res més, ni menys, que estar precedit per 2, 1, i possiblement 0, i estar seguit per 4, 5, etc. I ser el nombre 4 no és res més, ni menys, que estar precedit per 3, 2, 1, i possiblement 0, i estar seguit per... Qualsevol objecte pot tenir el paper de 3; això és, qualsevol objecte pot ser el tercer element en alguna progressió. Allò que és peculiar a 3 és que defineix aquest paper -- no per ser un paradigma d'algun objecte que té l'esmentat paper, sinó per representar la relació que qualsevol tercer membre d'una progressió manté amb la resta de la progressió.
L'aritmètica és doncs la ciència que elabora l'estructura abstracta que totes les progressions tenen en comú merament en virtut de ser progressions. No és una ciència que tingui a veure amb uns objectes especials -- els nombres», a What numbers could not be, pàgs.290-291. Tanmateix sembla que la seva inclinació a rebutjar que els nombres siguin conjunts, per tant que un nombre tingui una significació, un objecte enllà del lloc que ocupa en una «estructura abstracta» (Benacerraf està pensant sempre en Frege) hagi pesat bastant: perquè el mateix autor parla de l'important paper de la cardinalitat, el fet d'anomenar amb nombres les coses, com una circumstància cabdal (això és el que l'autor creu que el separa de Quine), i que els nens aprenen, afer que ens remet a usos lingüístics on no necessàriament es determina una «estructura abstracta»: fet i fet un tal «estructura abstracta» sembla contenir consideracions de la sèrie numèrica abstracta i alhora dels nombres estructurals, altrament semblaria impossible, per exemple, que l'aritmètica pogués elaborar la relació «menys-que», etc.

on hi ha un terme primer, un successor de cada terme (de tal manera que no hi ha un darrer terme), cap repetició, i on es pot abastar un terme qualsevol per un nombre finit de passos des del començament, s'anomena una progressió. Les progressions són molt importants en els principis de les matemàtiques. Com acabem de veure, qualsevol progressió verifica els cinc axiomes de Peano. Es pot provar inversament que qualsevol sèrie que verifica els cinc axiomes de Peano és una progressió. D'aquí que aquests cinc axiomes poden usar-se per a definir la classe de les progressions: les "progressions" són "aquelles sèries que verifiquen aquests cinc axiomes". Pot prendre's la progressió com la base de les matemàtiques pures: podem donar el nom "0" al seu primer terme, el nom "nombre" al conjunt sencer dels seus termes, i el nom "successor" al següent terme e la progressió. Però la progressió no necessita estar composta de nombres: pot estar composta de punts de l'espai, o de moments del temps, o de qualssevol altres termes dels quals hi hagi una assortiment infinit. Cada progressió diferent originarà una interpretació diferent de totes les proposicions de les matemàtiques tradicionals pures; i totes aquestes interpretacions possibles seran igualment vertaderes.

En el sistema de Peano no hi ha res que ens faci ser capaços de distingir aquestes diferents interpretacions de les seves idees primitives. Més aviat s'assumeix que sabem què significa "0", i que no suposarem que aquest símbol signifiqui 100 o l'obelisc de Cleopatra, o qualsevol altra cosa que pugui significar.

Aquest fet, que "0","nombre" i "successor" no poden definir-se per mitjà dels cinc axiomes de Peano, és important. Perquè nosaltres no volem sols els nostres nombres per a verificar les fórmules matemàtiques, sinó també per a aplicar-los correctaemnt als objectes comuns. Nosaltres volem tenir vint dits, dos ulls i un nas. Un sistema en el qual "1" signifiqués 100, "2" signifiqués 101, etc., podria anar molt bé per a les matemàtiques pures, però no seria apropiat per a la vida diària. Volem que "0", "nombre", "successor", gaudeixin d'uns significats que ens permetin el compte correcte dels dits, dels ulls i dels nassos. Ja tenim algun coneixement (prou articulat o analític) d'allò que "1", "2", etc. signifiquen, i cal que el nostre ús dels nombres en aritmètica sigui conforme amb aquest coneixement. No podem assegurar que aquest sigui el cas en el mètode de Peano; tot el que podem fer, si l'adoptem, és dir que "sabem el que "0", "nombre" i "successor" signifiquen, malgrat que no podem explicar el que signifiquen en termes d'altres conceptes simples". És prou legítim de dir això quan ho hem de fer, i en un cert punt tots ho hem de fer; però l'objecte de la filosofia matemàtica és de diferir aquest «hem» tant de temps com sigui possible. I per la teoria lògica de l'aritmètica som capaços de fer-ho per molt de temps»[10].

[10] Introduction to mathematical philosophy, pàgs.8-9.

Són interessants perquè (1) Peano ens ofereix una formalització axiomàtica que, com en qualsevol altra cas, demana una connivència del lector; no sembla que vulgui dir-nos què és el nombre ni què és el zero; (2) la sèrie de nombres abstractes (o els corresponents nombres estructurals) pot ser reemplaçada per qualsevol altra sèrie (mentre sigui sèrie), però sembla que Russell cregué que la substitució de la sèrie natural per una altra sèrie era senyal d'alguna inconveniència en tant que aquella sèrie hauria de valer per a totes les coses, no semblant observar que qualsevol cosa podria treballar com les nostres formes numèriques, mentre en tinguéssim una sèrie, mentre cadascuna posseís una marca distintiva i permetés el seu ús com a nombre abstracte, i mentre poguéssim diferenciar una sèrie així constituïda d'una altra; (3) en Russell 0, 1, etc., havien de passar per "0", per "1", etc., però alhora que mai no fos quelcom concret (una forma numèrica, un dit, una cosa qualsevol).

En efecte havent indicat més d'una vegada que la concepció del nombre com una classe de classes no és del tot satisfactòria (cf. Introducció i § 33 punt 7), ¿no hauríem d'admetre doncs, amb David Hilbert, que els objectes materials, i.e. extralògics, de la matemàtica són els símbols concrets que usa, immediatament accessibles a la intuïció? L'autor en efecte es desmarcà del logicisme en afirmar que «Kant ja ha ensenyat -- i això constitueix certament una part integrant de la seva doctrina -- que la matemàtica disposa d'un contingut garantit independentment de qualsevol lògica i per tant que mai dels mais no pot fonamentar-la sols la lògica, per la qual cosa els esforços de Frege i de Dedekind havien també d'anar-se'n en orris. Més aviat està ja donat quelcom en la representació com a condició prèvia de les aplicacions de les inferències lògiques i de l'exercici de les operacions lògiques: certs objectes concrets extralògics que estan allí d'una manera intuïtiva, com a vivències immediates prèvies a qualsevol pensament. Si les inferències lògiques han de ser assegurades, llavors cal examinar perfectament aquests objectes en totes les seves parts, i llur mostració, llur diferència, el fet de seguir-se els uns als altres o de trobar-se arrenglerats els uns al costat dels altres, es dóna així mateix d'una manera intuïtiva immediata amb els objectes, com quelcom que no es deixa reduir a una altra cosa o que no necessita una reducció. Aquest és el punt filosòfic bàsic que mantic com a necessari per a la matemàtica i en general per al pensament, per a la comprensió i per a la comunicació científics. I en especial en la matemàtica els objectes de la nostra consideració són els nombres concrets mateixos, la forma dels quals, d'acord amb el nostre punt bàsic, és immediatament clara i recognoscible»[10].

El formalisme hilbertià —— com l'intuïcionisme matemàtic —— tenen l'aparença de moviments de reacció que tendiren a una certa unilateralitat. Però en parlar d'aquest formalisme cal distingir entre els objectes extralògics (tal i com entén Hilbert la lògica), que són els símbols de la nostra experiència immediata, i l'aparell lògic gràcies al qual, per exemple, és possible de bastir l'axiomatització d'una disciplina, això és, l'ús d'un sistema de fórmules amb una interpretació, sistema a partir del qual parteixen les corresponents proves.

Entrem doncs en el primer punt, el dels objectes matemàtics, en particular els de la teoria numèrica, tal i com seria possible de descabdellar-los independentment de l'axiomatització i d'acord amb les representacions d'una experiència concreta:

« En la teoria numèrica tenim un objecte de sortida i un procés de desenvolupament. Cal que concretem les dues coses d'una manera intuïtiva i seguint una línia. Certament el tipus particular de concreció és aquí inessencial, tot i que cal mantenir l'opció agafada al llarg de tota la teoria. Escollim doncs la xifra 1 com a cosa de sortida, i l'afegiment de 1 com a procés de desenvolupament.

«Les coses que, partint de la xifra 1, s'obtenen per mitjà de l'aplicació del procés de desenvolupament, com per exemple

1, 11, 1111

són figures de la següent mena: comencen amb 1, acaben amb 1; a cada 1 que no constitueix el final de la figura, el segueix un 1

---

[10] Über das Unendliche, pàgs.170-171.

afegit. Per tant s'obtenen per mitjà de l'aplicació d'un procés de desenvolupament, per mitjà doncs d'una construcció concreta que arriba al final, i per això aquesta construcció s'anul.la també pas a pas per mitjà d'una desconstrucció.

«Aquestes figures constitueixen una classe de xifres; aquí volem usar el mot "xifra", simplement, per a assenyalar aquestes figures.

«Quant a la naturalesa figurativa exacta de les xifres, pensem, com és usual, que hi ha un cert marge de llibertat, això és, cal que no entrin en consideració les petites diferències de faiçó, tant quant a la forma de 1 o a la seva mida, com quant a la distància a la qual col.loquem un 1. Allò que tenim com a essencial és sols que tant en el 1 com en l'afegiment gaudim d'un objecte intuïtiu que es pot reconèixer d'una manera unívoca, i que puguem examinar sempre en una xifra les parts discretes a base de les quals està constituïda.

«Al costat de les xifres introduïm també uns altres signes, signes "per a la comunicació", que cal diferenciar de cap a cap de les xifres que constitueixen els objectes de la teoria numèrica.

«Un signe per a la comunicació és també, pres per ell mateix, una figura, de la qual pressuposem així mateix que es pot reconèixer unívocament i que no depèn de petites diferències en la faiçó. Dins de la teoria, però, no fem pas aquell signe l'objecte de les consideracions, sinó que constitueix aquí un mitjà per a la formulació breu i clara de fets, afirmacions i supòsits.

«Usem en la teoria numèrica les següents classes de signes per a la comunicació:

«1. Lletres gòtiques petites per a designar qualsevol xifra no concretada;

2. Els nombres usuals per a l'abreujament de xifres determinades, per exemple 2 per a 11, 3 per a 111;

3. Signes per a certes accions que duem a terme amb les xifres, i per a certs processos constitutius pels quals guanyem unes xifres des d'unes altres donades;

4. El signe = per a la comunicació de la igualtat figurativa, el signe ≠ per a la comunicació de la diversitat de dues xifres; el signe < per a designar la relació de quantitat (que encara hem d'esclarir) entre signes numèrics.

5. Parèntesis com a signes per a la manera en què els processos se succeeixen els uns als altres, quan això no és clar sense més.

«Com s'opera amb els signes introduïts i com cal fer-hi entrar riques consideracions, ho veurem de la manera més clara si descabdellem una mica la teoria numèrica en els seus trets cabdals»[12].

Observi's que un hom no se circumscriu als nombres abstractes: el fet d'afegir en la confecció de noves xifres unitat rera unitat ho assenyala perfectament, ultra que el comentari que no cal atendre la forma de la unitat, la seva magnitud, etc., de bell nou ho rebla (una consideració abstracta del nombre tindria problemes fins i tot en l'ús d'unitats romanes al costat de les àrabs, en la garantia d'igualtats, etc.): el text exemplifica més aviat el nombre a través de les xifres (1, 11, 111, 1111, etc.).

Sembla també que la presentació de Hilbert no és pas la més escaient (tot i que l'afer és en bona part secundari), com ho prova el següent text, una vegada acabat l'esbós de la teoria numèrica des d'un punt de mira no axiomàtic:

«Basti això per a la caracterització del tractament elemental de la teoria numerica. L'hem descabdellat com una teoria de les xifres, per tant d'una certa classe de figures especials simples. La significació d'aquesta teoria per al coneixement es troba en la relació de les xifres amb el propi concepte del nombre (Anzahl-Begriff). Aconseguim aquesta relació de la següent manera:

«Tinguem davant un tot concret (i en qualsevol cas finit) de coses. Col.loqui's una darrera de l'altra les coses del tot, i adjunti-se'ls seguint la sèrie les xifres 1, 11, 111, ... com a números. Quan ja no tenim cap cosa més, haurem abastat una certa xifra n. Llavors aquesta xifra, abans que res com a nombre ordinal (Ordinalzahl), és una de determinada per al tot de coses en la sèrie escollida.

«... podem adjuntar-la [i.e. la xifra n] en aquest sentit al tot com el nombre (Anzahl). Diem que el tot consta de n coses»[13].

Perquè podrien brollar uns possibles problemes: (1) cada xifra hilbertiana essent una estructura, la xifra n podria tenir-se com una estructura que alhora s'estructura amb les altres estructures, un afer pel qual si més no no sembla que s'inclinin les concepcions quotidianes de la teoria numèrica. (2) El nombre ordinal (el tercer, el quart, etc.) seria més aviat el d'una sola cosa i no recolliria pas una totalitat de coses, per més que pressuposi un

---

[12] Grundlagen der Mathematik I, pàgs.20-22.

[13] Ibidem I, pàgs.28-29.

recompte[14]. El segon punt conté potser una ambigüitat insuperable en la concepció del nombre ordinal en Hilbert, el primer podria evitar-se en la ~~mida~~ mesura que superposéssim totes les xifres, i.e.

11111...

i uséssim per a cada unitat afegida els nombres quotidians, car si Hilbert fa correspondre

1	1
2	11
3	111
4	1111
etc.	etc.

llavors es corresponen les sèries

1, 11, 111, 1111, ...
1, 2 3, 4, ...

Les xifres de Hilbert suggereixen doncs que hi ha certes reduplicacions innecessàries per a la presentació material de la teoria numèrica. Preguntem-nos de primer si seria possible de circumscriure el nombre matemàtic als nostres nombres estructurals i abstractes; en principi no hi hauria versemblantment cap inconvenient; en aquest cas la discussió estaria a precisar els termes en els quals s'entén ~~la sèrie~~ el nombre estructural i el nombre abstracte, això és, una sèrie numèric és sens dubte una síntesi, però la utilitat de la sèrie no prové sols del fet que sigui una síntesi (llavors qualsevol sèrie seria simplement equivalent a qualsevol altra, i.e. no hi hauria manera de quantificar una sèrie, el cinc estructural seria equivalent al quatre estructural etc.); alhora un nombre abstracte expressa certament una afecció, però no una qualsevol afecció. ~~La sèrie numèrica~~ El nombre estructural, és clar, pressuposa la història lògica de la seva constitució, això és, la individuació dels termes, llur diferència (i la capacitat d'aprenentatge, i.e. de no repetició, d'afecció que hom «sap» què ha fet abans, etc.) i la síntesi final (el nombre com una estructura), i el nombre abstracte només és l'obvietat d'un compte.

En d'altres paraules: l'acceptació ~~de la sèrie numèrica~~ del nombre estructural com el nombre aritmètic pren la sèrie numèric com una sèrie concreta de coses el nom de les quals és igual a la figura de l'última individuació; n'hi ha prou a no confondre el nom i allò que s'anomena, per exemple '2' en la determinació "2" de '1,2', per veure que ens

---

[14] Sigui com sigui val la pena d'observar que la passa lògica des d'aplicar una xifra a una cosa al fet que aquesta xifra serveixi alhora de nombre de... (Anzahl) és un fet de cap a cap rellevant des d'un punt de mira lògic, mentre que Hilbert no ens en diu pràcticament res; però el fet d'adjuntar (beilegen) les xifres a les coses i la mateixa sèrie de coses esdevé tan rellevant com la confecció de les xifres i de la seva sèrie: l'enumeració i el nombre de coses té els mateixos pros i contres que la confecció de les xifres i de les seves sèries, però és aquesta direcció de les consideracions les que menen a la interna connexió racional entre les aplicacions físiques de la teoria numèrica i el seu descabdellament xifrat.

i el nombre aritmètic com

trobem de ple en els nombres concrets, i.e. que els nombres estructurals són sols un cas de nombres concrets, on el nom del nombre és igual a la figura de la darrera individuació. La insistència en el nombre estructural ~~la xifra numèrica com~~ a únics nombres aritmètics seria supèrflua, es basaria potser en la confusió de nom i d'anomenat, i enterboliria les connexions entre les aplicacions numèriques i la teoria ~~(formal)~~ dels nombres, així com la circumstància que enumerem i comptem també les coses que no són iguals a les figures dels noms amb què anomenem i comptem.

Tornem ara a Hilbert: els únics nombres (Zahlen) essent xifres (1, 11, 111, etc.) val de cap a cap el que hem afirmat per al nostre nombre estructural, car mentre per a nosaltres el nom que s'usa és igual a la figura de l'últim individu, per a Hilbert el nom d'un xifra és un mitjà de comunicació (per tant anomena la corresponent xifra): en d'altres paraules les xifres són estructures concretes, cada xifra consta de coses estructurades que no tenen més prerrogatives respecte d'altres coses estructurades que el fet de dibuixar-les amb comoditat (recordem que Hilbert no creu que sigui rellevant el canvi de figura i de magnitud!). En conjunt la prevenció de Hilbert sobre la natura del nombre matemàtic és irrellevant en tant que pren casos concrets d'estructures.

Tanmateix hi havia un segon punt al costat de la teoria numèrica descabdellada segons les representacions d'una experiència concreta, punt que feia referència a la seva axiomatització tal i com el nostre autor l'entén: serien ara els aspectes formals (per contraposició a la seva interpretació material) el que ens interessaria.

Hilbert doncs estudia profusament la lògica d'enunciats i la lògica de predicats, d'acord amb els models del construccionisme de les operacions i d'allò que anomenàrem predicació fregeriana, dels quals ja en férem una aproximació més amunt: el construccionisme es manté com un joc independent, la predicació, en conjunt, no ha d'acondiur necessàriament a confusions quan el predicat és una part d'un ~~sistema formal~~ llenguatge (anomena allò que ja és un tros d'un ~~fórmula~~ llenguatge) i quan es valoren ~~les fórmules~~ els llenguatges de partida exhaustives

i la corresponent reformalització com a punts d'arribada d'uns processos d'aprenentatge.

L'equipament d'una teoria numèrica amb aquelles lògiques pel cap baix complica extraordinàriament tant el procés d'una escarida teoria numèrica com la seva possible (i segurament desitjable) axiomatització sense pretensions epistemològiques. En efecte l'ús del construccionisme de les operacions i dels escrúpols que origina en el propi practicant la predicació fregeriana enterboleixen la teoria numèrica, el sistema d'axiomes i les passes dels axiomes als altres moments de la teoria; però per se, i donat que Hilbert, malgrat ell mateix, està pensant sovint en una teoria numèrica ja formalitzada en la nostra accepció (i.e. un hom «ja sap» les xifres, «ja domina» les relacions de majoritat i de minoritat, etc.), en principi la superposició d'un construccionisme de les operacions a les corresponents fórmules numèriques i l'ús de la quantificació, per més que complica prou i innecessàriament la teoria numèrica i la seva axiomatització, no hi introdueixen errors, sinó maneres de manipulació de ~~formalitats~~ demostracions (quelcom si més no sempre legítim, però de vegades no avantatjós).

El problema es troba doncs més aviat en l'estimació del que s'està fent. En conjunt qualsevol generalització i formalització no val sinó pel procés que hi duu, això és, per la lògica reiteradament seguida fins que un hom aprèn la generalització-formalització corresponent, i no pas a l'inrevés; prenguem per exemple una axioma del tipus «un nombre és més petit que el seu successor»: en principi és la resultant d'haver anat bastint pacientment el nombre estructural "2" (o la xifra hilbertiana '11'), després del "3" ('111'), d'haver establert una colla de relacions fins a la relació més; d'haver vestit el nombre estructural "3" ('111'), després el "4" ('1111'), etc., de tal manera que la reiteració del joc, la capacitat humana d'afecció i d'aprenentatge, la circumstància que anomenem 'nombre' els membres en qüestió, etc., permeten la generalització-formalització «un nombre és més petit que el seu successor»; però parlant pròpiament una tal generalització-formalització és incapaç de substituir el joc lògic entre "2" i "3" fins a establir una relació de minoritat, talment com aquella generalització-formalització o el joc entre "2" i "3" és incapaç de substituir el joc lògic entre "3" i "4" i llur relació de minoritat, etc. Cap instància de substitució d'una expressió formal-general «es troba» en aquesta expressió: l'estimació que una generalització-formalització enclou les seves instàncies de substitució -- l'estimació que una generalització-formalització abarca les seves aplicacions-- és un miratge, un reflex a partir de la constitució i de l'engendrament de les corresponents generalitzacions-formalitzacions, reflex que es rebla gràcies a l'aprenentatge reiterat en la direcció contrària del seu engendrament, afer que se sent com la virtualitat d'una generalització-formalització.

Això que diem per a un axioma o per a un principi general s'ha d'estendre a qualsevol regla d'inferència: un sil.logisme formal tipus BARBARA és una conseqüència de moltes instàncies insubstituïbles les unes a les altres, que tenen com a resultant una generalització-formalització, cosa que valdria també per a una regla d'inferència fins i tot en el cas d'haver-la definida, perquè llavors qualsevol instància d'aquesta regla o és <u>igual</u> a ella (per tant se n'independitza) o és una instància de substitució que en segueix l'estructura, n'amplia el joc mentre se n'independitza, i en els dos casos no hi ha possibilitat de fer desaparèixer la relació entre allò que es té exemplarment com la regla d'inferència i les instàncies, per més que la regla definida serveixi com a generalització-formalització de totes les instàncies.

L'axiomatització hilbertiana per tant no és tan criticable per l'ús del construccionisme de les operacions i de la generalització fregeriana (que ho és també per la complicació i l'artificiositat amb què vesteix la teoria numèrica), com pel fet que les expressions generals d'unes tals lògiques estan afectades de contenir le seves aplicacions i ~~de fer llei a~~ les seves instàncies φ de substitució; com pel fet que, quan Hilbert interpreta materialment algunes expressions, llavors uns tals axiomes ~~fan la llei de~~ les seves aplicacions i ~~de~~ les seves instàncies; com pel fet, finalment, que les regles d'inferència (el construccionisme) ~~fan llei per a~~ qualsevol inferència paral.lela posterior.
subsumeixen estan afectats de contenir

El lector entendrà també que la preocupació que els sistemes axiomàtics no menin a contradiccions, que hi hagi <u>Widespruchsfreiheit</u>, és quelcom que sols es pot anar assegurant a través del descabdellament discursiu d'una disciplina, quelcom si més no emparentat amb les consideracions de Hilbert sobre la verificabilitat d'una fórmula (i.e. el fet de ser veritat) i la seva falsedat i sobre la deductibilitat, sols que la no contradicció d'un sistema axiomàtic és quelcom que es va trobant, alhora que qualsevol axiomatització és una manera d'anar presentant l'estat d'una disciplina: podem tenir doncs problemes sense resoldre, canviar les presentacions, etc., i arreu és vàlid que no ens interessa tant mostrar que no ens contradim -- afer que no ens ho ensenyarà cap generalització si no ho reconeixem sobre el procés lògic -- com avançar en el descabdellament de la disciplina[15].

---

[15]Malgrat tot el lector de les <u>Grundlagen der mathematik</u> pressenteix la grandesa del treball ímprobe d'uns autors que no defalleixen en la convicció dels poders d'un sistema axiomàtic, amb unes eines dolentes segons el nostre punt de vista, i que són capaços fins a oferir-nos sis sistemes axiomàtics en l'assaig de millorar una vegada i una altra l'abast del formalisme per a tota la teoria numèrica. Pel cap baix les <u>Grundlagen</u> passen, al costat d'altres obres eminents, com un bell exponent de la persistència i de l'esforç humà.

L'axiomatització d'una disciplina matemàtica (si es vol: el formalisme axiomàtic del tall, per exemple, del de Peano) esdevé doncs quelcom vàlid i palesa la coherència ~~(formal)~~ del propi estudi de la disciplina; és cert que, com veurem especialment per al cas de la geometria i que aquí sols s'ha apuntat, l'axiomatització no pot suplir l'absolut lògic del descabdellament demostratiu i que, en el cas de l'aritmètica, no explicitaria coses tan elementals com els nombres concrets, ~~la posicionalitat del nostre sistema numèric~~, el motiu que ens fa acceptar les regles de multiplicar o la naturalesa de les operacions amb quebrats, etc., o si més no ho faria difícil; tanmateix forma part de la filosofia i cal valorar-la com un intent d'ordenació d'allò que hem après. En qualsevol cas la crítica a d'altres formalismes axiomàtics no prové del dret indiscutible a les més diverses presentacions, sinó al valor lògic donat a una generalització (d'un principi, d'una regla d'inferència) o fins i tot a la inoportunitat d'introduir artificiosament nous problemes[16].

Abandonem ja aquesta breu ressenya sobre l'axiomatizació formal: ni acceptem una teoria numèrica perquè l'axiomatitzem ni ens interessen ara les axiomatitzacions no dirigides (que són sempre a posteriori de la constitució d'una disciplina) quan encara hem d'estudiar, el càlcul numèric i la constitució de les corresponents generalitzacions ~~formalitats~~. Caldrà doncs tornar al terreny dels nombres concrets, dels estructurals i dels abstractes a fi d'albirar algun fil conductor.

---

[16]Fem observar d'una manera ~~molt~~ molt sumària que l'esplèndid treball de Gödel Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, tal i com el seu autor ho defensà encertadament, val sols per als sistemes esmentats en el títol, això és, sistemes que creuen fundar (establir) el discurs amb uns pocs axiomes i regles d'inferència. El teoria de Gödel es presentà com una sorpresa (i un escàndol) per a la lògica que afecta una extrapolació indefinida (serví de crítica «interna»). Feta la crítica a l'enlluernament lògic i des de posicions de l'adquisició d'una lògica lingüística per generalització (que defensem aquí), sembla que podríem interpretar el treball de Gödel més aviat com una reducció a l'absurd que menaria a reconèixer que és impossible d'admetre el punt d'on arranca, això és, al fet obvi -- deixant les afeccions extrapoladores -- que una instància definidora no pot ser equivalent a una part de la pròpia instància definidora, que ens trobem amb quelcom íntimament relacionat amb la paradoxa del mentider.

D'altra banda el lector comprendrà perfectament per què bandegem aquí qualsevol consideració metamatemàtica.

§ 34 Quantitat i igualtat en els nombres: els nombres exemplars.

1. Dos qualssevol individus són equivalents (i.e. són termes d'una relació), però no necessàriament iguals. Amb ~~En~~ nombres concrets sols es pot assegurar la igualtat quan es tracta de la reflexió sobre ells mateixos ("dos homes són iguals a ells mateixos"), altrament cal que hi hagi la corresponent donació lògica ("aquestes tres segments són iguals a aquells dos"); però en principi dos homes no són iguals a dos altres homes o el segon home d'una fila no és igual al segon home d'una altra fila[17], i més aviat hi ha en tots aquests casos equivalència d'individus (si són nombres concrets d'individus) o paral.lelisme d'estructures (si són nombres concrets estructurals).

Pot admetre's fàcilment que no hi ha més/menys entre nombres concrets d'individus en tant que tals (hi ha sempre equivalència, i de vegades igualtat), mentre que entre nombres concrets estructurals hi ha quantitat en tant que estudiem l'estructura, trobem individus i la relació més; diem per això que té quantitat allò que es pot comptar: perquè el nombre concret estructural corresponent esdevé a partir de la resultant d'un compte, mentre hi ha una anàlisi entre els membres de l'estructura.

2. Els nombres concrets (estructurals), entre si ~~ells~~, són en principi més grans o més petits. Per tant

$$3 \text{ homes} > 2 \text{ homes}$$
$$1 \text{ home} < 2 \text{ homes.}$$

Si comptés gossos en lloc d'homes

$$3 \text{ gossos} > 2 \text{ gossos}$$
$$1 \text{ gos} < 2 \text{ gossos.}$$

Deixant doncs els nombres concrets i prenent els abstract~~ament les formes~~ podria escriure

$$3 > 2$$
$$1 < 2.$$

En la mesura ~~mida~~ que guardo ~~en la memòria~~ les diferents formes que he usat com a noms i que tot plegat ha esdevingut un aprenentatge

---

[17]Observi's ~~així mateix~~ que la igualtat en el fet de ser homes es podria resoldre potser amb la identitat de l'estructura d'homes. Advertim així mateix que en tota aquesta secció es considera la identitat a la manera d'una igualtat en específiques circumstàncies -- com es fa comunament -- sense que allò rellevant per a la identitat sigui precisament la igualtat (cf. § 2).

posseeixo una colla de nombres ~~formals~~ abstractes, les relacions entre els quals ~~són incomprensibles~~ vistes des d'ells mateixos.
serien potser difícils de comprendre

D'altra banda dos nombres abstractes també són iguals ~~quan ho són~~ per la forma ('4' és igual a '4'); per a d'altres representacions gràfiques ('4' igual a 'IV' o '4' igual a '4') la igualtat formal està assegurada perquè hom els pronuncia igual, per exemple. En el cas d'usar llengües diferents hom ha de saber l'equivalència formal ('zwei' és equivalent a 'dos', i 'dos' és igual a 'dos'), etc.

Recordem que val per al nombre abstracte la igualtat per la identitat.

3. En els nombres estructurals l'afer s'entén com en els nombres concrets estructurals, respecte als quals basteixen estructures paral.leles (cf. § 16): el nombre 5 és més petit que el 8, més gran que el 4 i igual a ~~ell mateix~~ 5, perquè

1,2,3,4,5	<	1,2,3,4,5,6,7,8	5<8
1,2,3,4,5	>	1,2,3,4	5>4
1,2,3,4,5	=	1,2,3,4,5	5=5

això és, "5" és més petit que "8", és més gran que "4" i és igual a "5" (o a ell mateix).

D'altra banda qualsevol sèrie té un paral.lelisme estructural amb qualsevol altra, per exemple en

I	II	III	IV	V	VI
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6

on la majoritat i la minoritat s'entenen com dalt i on no hi hauria en principi igualtat; però els nombres estructurals tenen per elements les formes dels nombres abstractes: allò que assegura la igualtat dels nombres abstractes assegura la igualtat dels nombres estructurals.

La inclinació a considerar iguals dos nombres concrets -- ens referim sempre als nombres concrets estructurals -- és comprensible quan recordem l'ús sovintejat del llenguatge com a registre i que al cap i a la fi per a nombres més grans d'unes quantes unitats la màxima síntesi possible són unes quantes unitats; en les nostres converses «tres homes» són poca cosa més que 'tres homes' o que l'obvietat de repetir 'un home, dos homes, tres homes'.

La igualtat numèrica té un suport important en la forma dels ~~noms dels nombres (nombre abstracte)~~ mots numèrics i en les estructures d'aquests ~~noms~~ mots (nombre estructural).

4. La igualtat entre plurals nombres concrets no està doncs sempre garantida: però, d'una banda, qualsevol nombre concret té una estructura paral.lela a un altre nombre concret exemplar, les

unitats del qual es prenen sempre iguals les unes a les altres (<u>parts</u> o <u>ratlletes</u> iguals, etc.), i té també una estructura paral.lela al corresponent nombre estructural -- alhora <u>el nombre concret exemplar</u> (o <u>nombre exemplar</u>) té una estructura paral.lela al corresponent nombre estructural; fet i fet en un reguitzell de coses, de termes, ~~les seves unitats tenen els noms numèries~~ usem les formes lingüístiques que entren en la sèrie dels estructurals; a més la forma numèrica sols entra en la sèrie estructural com a exemplificació d'<u>una</u> cosa; finalment, en una mateixa llengua, hi ha una igualtat de noms entre els nombres concrets, els exemplars i els estructurals, i per tant hi ha una igualtat de nombres abstractes. En efecte al nombre abstracte no li importa d'on prové, si d'un nombre concret, exemplar o estructural, mentre assegura arreu una igualtat formal, tant i més quan ~~els seus noms són els noms d'~~ via les formes lingüístiques que utilitzem en un qualsevol nombre i alhora són ~~des~~ que que entren en la sèrie del nombre estructural.

Sembla més aviat que nosaltres <u>traspassem</u> de vegades totes aquestes instàncies, mentre que en qualsevol cas la <u>igualtat</u> ens sigui assegurada ja per la igualtat d'unitats exemplars, ja per la igualtat dels estructurals, ja per la igualtat abstracta.

§42. <u>Els ~~graus~~ ordres de la unitat: un nombre com a simple nombre i com a pluralitat de nombres; la igualtat entre el nombres grans.</u>

1. Les consideracions anteriors sobre el paral.lelisme estructural entre els nombres concrets, exemplars i estructurals sols es poden referir, de manera clara, a nombres sobre els quals hi pugui haver <u>un cert</u> joc d'inspecció; tanmateix el paral.lelisme d'estructures sovint es descabdella ja en mera equivalència entre unitats d'uns quants membres cadascuna.

Però ens hem d'entendre perfectament: quelcom com

.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

és un fet d'experiència en l'accepció que el nombre concret 8 o és ~~el nom que~~ un punt mentre conté l'afecció lingüística pròpia del nom '8', o és <u>una</u> síntesi de vuit punts, per tant quelcom que conté una altra afecció lingüística del nom '8' (parlem de vuit punts i del punt vuit). És clar que nosaltres no podem determinar <u>alhora</u> vuit determinacions, però aquesta circumstància només implica que no podem superar la facticitat determinativa, i caldria tenir el fet lingüístic (afecció) dels vuit punts a tall d'un «resum lingüístic» com quan parlem «de les coses que hem fet en les últimes dues hores» o quan comentem que «tots els presents portaven corbata», però no comprometeria l'experiència pel fet que podem recuperar d'altres determinacions d'una manera efectiva o representativa, alhora que la veritat i la falsedat que hi hagi vuit punts depèn precisament de l'experiència. Per tant les afeccions dels noms numèrics estan emparentades amb les afeccions lingüístiques d'allò que supera la nostra experiència no lingüística o d'allò que supera la nostra facticitat determinativa (el lector entendrà doncs què no importa massa que «tinguem efectivament davant» els vuit punts: podríem comptar els vuit cotxes que han anat passant en les respectives vuit hores), i assenyala més aviat la nostra capacitat per a dominar les afeccions, això és, la nostra versatilitat comportamental. Fet i fet sols ~~en~~ què aquests supòsits podem parlar de «paral.lelisme estructural» entre una sèrie de coses (nombre concrets), una sèrie exemplar i una sèrie estructural.

Tot això té la seva importància quan assagem una passa més: tinguem

```
. . . . . . . . . .    10
. . . . . . . . . .    20
. . . . . . . . . .    30
. . . . . . . . . .    40
. . . . . . . . . .    50
. . . . . . . . . .    60
. . . . . . . . . .    70
. . . . . . . . . .    80
. . . . . . . . . .    90
. . . . . . . . . .   100
```

on se'ns presenta per primera vegada el problema no pas de ressequir punt per punt (un afer ara inessencial), sinó ~~dels noms~~ de les formes numèriques a usar: el nostre sistema posicional considera que els deu primers punts fan un rengle ('10'), essent el nom del rengle ('10') com el de la simple unitat, mentre el col.loca a l'esquerra del dels possibles punts que excedeixen aquell rengle, o col.loquant-lo a l'esquerra de '0' quan sols hi ha un rengle, i precisament per a diferenciar el nom del rengle i el nom d'una simple unitat. és clar que hem hagut de concebre un tal nom, car els seus altres noms ('deu', 'desena', no n'assenyalen pas la manera de fer-ho).

Quan comencem a comptar el segon rengle ja sabem que hem comptat un rengle ('10'), i ara repetim el compte com si comencéssim de nou, tot col.locant el ~~nombre~~ nom d'unitats simples a la dreta del ~~nombre~~ nom del rengle ('11', '12', etc.), malgrat que els seus altres noms no en donin la pista ('onze', 'onzè', etc., però 'disset', 'dissetè', segurament sí), fins a acabar el segon rengle, que representem per '20' assenyalant que hi ha dos rengles (compareu amb 'vint'), etc.

Quan arribem a 99, comprovem que el fet d'acabar l'últim rengle fa que tinguem deu rengles, ho escrivim tal qual ('100'): però el nombre 10 era considerat un rengle, i el nombre 100 és en efecte una columna: '100' indica perfectament que tinc una cosa, però que aquesta cosa té una estructura d'aquella columna — talment com '10' indica que tinc una cosa, però que té l'estructura d'aquell rengle

En aquest punt salten a la vista dues coses: de primer que hi ha un paral.lelisme estructural entre rengles, alhora que ràpidament la nostra pacient investigació per anar comptant un per un els punts dels rengles i els propis rengles, al marge dels afanys per a cercar representacions gràfiques escaients de les formes numèriques, recau en la conducta lingüística-extralingüística de l'obvietat que deu unitats fan un rengle, que deu més fan un altre rengle, etc., i que deu columnes fan una nova unitat, és a dir, l'obvietat de les unitats de primer ordre, de segon ordre i de la unitat de tercer ordre. Independentment doncs que podríem ara dibuixar mil punts (treball que ens estalviem no sense recança: mai no insistirem prou que les nostres conductes lingüístiques-extralingüístiques o sols lingüístiques tenen en l'experiència -- tal i com diguérem a propòsit de «superar» la finitud o la facticitat de la determinació -- la seva garantia) sens dubte arriba un moment en el qual l'afer esdevé mera conducta lingüística: hom estableix que deu unitats de tercer ordre fan una unitat de quart ordre, etc.

Notem que el paral.lelisme estructural entre rengles és independent del sistema posicional de l'escriptura: pobles antics com l'egipci o el grec comptaven sols amb unes poques formes numèriques, fonamentalment les de les unitats simples, les de les desenes, les de les centenes, etc.[18] Per tant s'explicaria per què esdevingué imprescindible que els pobles antics tinguessin formes numèriques per a les unitats de diferent ordre, alhora que amb un nombre no molt indefinit de formes poguessin comptar un nombre molt gran.

D'altra banda sistemes com el sexagesimal sumeri-babilònic feren segurament la mateixa cosa fins a arribar a 59 (amb base 10 doncs), i a partir de 60 hom repetiria la representació gràfica per a la unitat: per tant, i deixant de banda la forma numèrica usada en el nombre, alternarien el paral.lelisme estructural de deu unitats fins a la sisena amb un paral.lelisme estructural de 6 unitats-desena.

2. Les consideracions, molt importants, sobre les formes lingüístiques dels nombres haurien de valer en principi per si mateixes: és difícil de concebre que un hom cerqués formes numèriques mentre anomenava; més aviat sembla que els nombres concrets haurien cedit el pas a l'estudi dels noms per després retornar als afers que no ho són, amb la qual cosa tindríem que el paral.lelisme estructural entre la sèrie de coses no numèriques i

[18]Un dels millors treballs sobre els diversos sistemes de numeració mundial i sobre els càlculs amb operacions bàsiques és el de Geneviève Guitel, Histoire comparée des numérations écrites, que inclou estudis sobre la numeració egipcia, l'asteca, la grega, la romana, l'hebrea, l'etiòpica, l'àrab, la sumèria i la babilònica, la maia, la xinesa i la hindú.

de les formes numèriques seria un afer independent de la concepció de les pròpies formes numèriques. Això vol dir que mentre la significació numèrica concreta, exemplar, estructural i abstracta, prové de la primera consideració, prou dels nostres càlculs numèrics tenen també en compte la segona consideració. Una tal ambivalència prové que hem hagut de cercar les formes lingüístiques d'allò que engloba aquella significació numèrica.

Per a nosaltres doncs, com per'a l'egipci, «set mil tres-cents quaranta-cinc» és, en una accepció, cinc unitats, quatre unitats (desenes), tres unitats (centenes) i set unitats (milers), que, si no els considerem quatre nombres abstractes, remeten sols a les seves estructures específiques. Val la pena de remarcar doncs que «set mil trec-cents quarant-cinc» no fa, en aquesta accepció, un nombre, sinó quatre nombres.

Però, en una altra accepció, '7345' és el nom per a la set mil tres-centes quaranta-cinquena unitat concreta amb l'afecció d'un recompte, o per al nombre concret estructural que reculli l'abast possible, tot plegat amb l'afecció d'un recompte. Alhora '7345' torna a ser el nom d'un nombre estructural d'unes poques formes numèriques, la resta remetent a l'afecció d'una història. I per tots els camins hom pot considerar 7345 com un abstracte.

Per això la significació numèrica d'un nombre gran no supera una certa inspecció i remet la resta a l'afecció (a remarcar tanmateix que dominem totes aquestes afeccions, en podem disposar), o bé, simplement, és un nombre d'unitats i un altre nombre de desenes i un altre nombre de centenes, etc.

3. Notem que la igualtat entre nombres està assegurada, com dèiem, pels nombres exemplars i estructurals-abstractes.

Des del punt de mira de la successiva enumeració, quan anem comptant metres sols la certesa que totes les unitats examplars són iguals ens va certificant que tres-cents quaranta-cinc metres són iguals a tres-cents quaranta-cinc altres metres. Hi ha sens dubte un factor comportamental rebiat per l'anàlisi de qualsevol paral.lelisme possible d'unitats.

Amb els nombres estructurals s'esdevé una història similar: de bell nou el compte reiterat i les possibles igualtats entre trossos d'estrutura rebiarien la confiança en la igualtat de nombres estruturals.

El nombre abstracte, finalment, sempre ens proporciona igualtats.

Per tant la igualtat entre dos nombres grans sempre és, si més no, una igualtat entre nombres abstractes. Però no hem de rebutjar que sigui <u>així posada</u>, això és, parcialment respecte al tot, però tal com és possible per a l'home, la igualtat estructural o de nombres exemplars, ja sigui per un repàs d'alguna seqüència respectiva d'un compte de la vella, ja sigui per l'anàlisi respectiva fins a arribar a les seves unitats: recordem que «exactament igual» vol dir «tingut per igual», i és si més no segur que la igualtat numèrica entre 7345 i 7345 no se circumscriu definitivament sols a la igualtat entre la cosa '7345' i la cosa '7345'.

§53. <u>La suma, la igualtat en la suma i les propietats commutativa i associativa.</u>

1. Bandejant els usos com a mer registre sembla que anomenem 'suma' el pas lògic des de dues parts a la síntesi corresponent, tal i com sigui possible per a l'home; i d'una manera específica el mot 'suma' es reserva per a coses que tenen ~~nombres~~ mots numèrics per noms. El lector advertirà fàcilment que es tracta d'un mot-jòquer (§12).

Les vicissituds de la suma són en principi les d'un qualsevol compte, és a dir, si sumem

. . .   .

per tant tres punts i quatre punts, caldrà continuar el compte de tres punts, per consegüent farem quatre punts, cinc punts, sis punts set punts; hauria calgut doncs una experiència del tipus que ja hem assenyalat, <u>amb la resultant que aprenem finalment la conducta lingüística que suma abstractes</u> (hem après ja a sumar des de 1 i 1 fins a 9 i 9).

Essent els avatars de la suma els del compte, les tècniques de la suma seguiran també les tècniques per les quals anomenem els nombres; a

. . . .
. . .

. . . .
. . . .
. . . . . .

13 punts més 26 punts podran sumar-se com dalt, això és, podem anar comptant a partir de 13, o podem afegir els tots, i per tant comptem els rengles (tres rengles) i les simples unitats (9 unitats). En els sistemes posicionals com el nostre l'afer té l'avantatge que la conducta lingüística que mena a la suma abstracta de les unitats simples és igual a la conducta lingüística que acondueix a la suma abstracta de rengles (unitats de segon

ordre ~~grau~~). La suma doncs és una síntesi entre dues coses (o les seves afeccions), i llavors tenim quelcom a comptar: la resultant de la suma fa un sol problema amb el de comptar, n'és un cas més, i val doncs tot el que hem dit a propòsit del compte.

Podríem ara dibuixar centenars de punts i repetir una altra vegada l'afer, però ho deixarem estar per amor de la brevetat. Tanmateix és important de remarcar el caràcter experimental de les bases de la suma abans d'arribar a un comportament merament abstracte: és cert que cadascun dels sumands és ja una conducta lingüística (conté una afecció) no important massa que tinguem les respectives síntesis d'una manera efectiva en l'experiència o no (o que sigui ja un nombre merament abstracte), però la suma com a síntesi entre les dues coses com a tots (o les seves afeccions) ens fa trobar-nos de bell nou al problema del compte, abans que, apresa la conducta abstracta de la suma, ho fem directament o sumem d'una manera abstracta nombres molts grans que en principi tenim per mers abstractes. Ara bé acceptem la suma de mers abstractes de l'ordre que siguin perquè acceptem les conductes de la suma de nombres abstractes que poden seguir-se d'una manera no abstracte (sempre, però, d'una manera lingüística), i perquè hem après la conducta lingüística per a trobar nous ordres d'unitats a partir de l'experiència (sempre, però, d'una manera lingüística).

2. En determinar que la suma de tres homes més quatre homes fan set homes, hi ha una síntesi que rep un nom pel compte de les diverses unitats que hi analitzem, l'última de les quals és la setena.

Per tant, mentre estem fent la síntesi no estem ocupats en una relació d'igualtat, i més aviat aquesta relació s'esdevé a partir de la resultant.

Caldria distingir doncs el pas cap a la síntesi («3 més i fan 4» i la relació d'igualtat (o d'identitat). Fet i fet la moderna introducció del signe '=' (s.XVI) no supera aquesta ambivalència; en la suma concreta

"3 homes + 4 homes = 7 homes"

'=' és un terme que s'usa en principi com 'fan', car en cap cas set homes no són iguals a uns altres set homes; és clar que podríem interpretar-ho com la identitat dels set homes amb si mateixos, però si més no el propi desplegament de "3 homes + 4 homes = 7 homes" no ho sembla contenir tal qual: hom afirmaria més aviat la identitat dels set homes amb si mateixos; resta certament la solució de forçar la simple igualtat entre la suma de tres homes i de quatre homes amb la seva imaginació mentre un hom manté una tal relació. Tenim doncs que en

"3 homes + 4 homes = 7 homes"

'=' treballa com 'fan' o 'igual'; però en

"3 metres + 4 metres = 7 metres"

'=' pot usar-se com 'fan' o com 'igual' a semblança dels nombres concrets, o com 'igual' en l'accepció d'haver-hi una resultant (7 metres) igual a d'altres 7 metres qualssevol. En efecte

3 metres + 4 metres fan 7 metres
i 7 metres són iguals a d'altres 7 metres

Llavors l'expressió

3 metres + 4 metres = 7 metres

pot ser també un mitjà d'abreujament, com ho pot ser també, per exemple,

4 metres + 3 metres = 5 metres + 2 metres.

Tot això, és clar, val paral.lelament per als nombres estructurals.

En el cas dels abstractes

$$3 + 4 = 7$$

perquè 3+4 fan 7 o perquè 7=7.

Notem que aquesta ambivalència no és gens perillosa perquè estableix com a màxim la igualtat d'una cosa posada en relació amb la seva reproducció o, quelcom que li és estructuralment equivalent, la igualtat de resultants, alhora que hi ha un paral.lelisme d'equivalents entre els concrets, d'una banda, i els exemplars i els estructurals, per l'altra (i que els abstractes certifiquen igualtats per la seva pròpia forma). Aquella ambivalència és doncs avantatjosa perquè ens permet simplificar a nivell d'escriptura una pluralitat de casos (com a «fan», com a «m'ho imagino igual», com a «són efectivament igual», potser -- en d'altres casos -- com a «opera com», etc.) sense caure en cap arbitrarietat.

3. En els casos

3 homes + 4 homes = 7 homes
3 metres + 4 metres = 7 metres
"3" + "4" = "7"

disposats a donar una significació a '+' o 'més' ('i'), caldria dir que expressen més aviat la relació; '+' o 'més' ('i') no expressen la resultant, que pot estar elidida com en

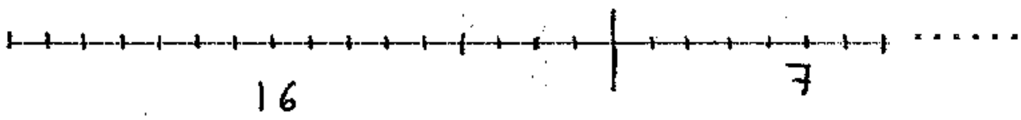
3 homes + 4 homes
3 metres + 4 metres = 4 metres + 3 metres

I en els nombres abstractes

$$4 + 5 = 9$$

'+' o 'més' esdevenen la seva pròpia virtualitat lingüística.

4. No costa de veure que la resultant de la suma de dos nombres és la mateixa, independentment de l'ordre des del qual els relacionem, es tracti de nombres concrets, exemplars o estructurals. Per exemple en



on comprovem que la línia una, independentment d'allargar-la més i més, és la mateixa: nosaltres doncs hem après des de l'experiència la propietat commutativa de la suma. Però l'expressió d'un tal fet per mitjà de

"3 homes + 2 homes = 2 homes + 3 homes"
"3 metres + 2 metres = 2 metres + 3 metres"
"3" + "2" = "2" + "3"

(i fins i tot "5 homes = 5 homes", "5 metres = 5 metres", "5"="5") Es estableix més aviat com a simple igualtat, car hom manté la relació: n'és un exponent el propi discurs lingüístic.

En el cas de no tractar-se de la mateixa resultant la igualtat es manté per als nombres exemplars i estructurals equivalents als concrets.

Tot això val també per als nombres abstractes: una mateixa resultant no lleva que en

$$3 + 2 = 2 + 3$$

(o en 5 = 5) no s'elideixi (o no s'expressi) una igualtat formal (en els altres casos, és obvi, es tracta també d'una igualtat formal).

I en la suma de més de dos nombres, la identitat o la igualtat continua essent de resultants, independentment de l'ordre des del qual els relacionem, mentre que el corresponent desplegament lingüístic estableix simplement igualtats.

5. Per al nostre càlcul numèric amb nombres grans (cf. §42) no s'hi val de mantenir un abast indefinit; en qualsevol cas aquestes sumes obtenen («fan») una resultant; i també un qualsevol

nombre és igual «a ell mateix» (com a relació estable), o és igual a un altre qualsevol nombre en l'accepció d'haver-hi una confiança que remet a la igualtat d'allò que s'inspecciona després d'haver comptat unitats tingudes per iguals, per tant amb un tret afeccívol, amb l'afegit que la igualtat abstracta dels nombres rebla l'afer -- o remet a les igualtats d'allò que es pot inspeccionar en qualsevol ~~grau~~ ordre alhora que hom creu que ho podria anar comprovant en una llarga experiència d'una sèrie o d'entre sèries i que té el darrer nombre com el d'una sèrie que hom podria comptar, etc.

§44. La resta. El zero.

Entre els plurals usos del mot sembla que anomenem 'resta' el procés lògic que analitza un tot i que en troba un altre que forma part del primer. De manera especial la resta sembla una anàlisi d'una estructura numèrica i que considera una nova individuació: si llevem un d'aquests tres homes queden encara dos homes (la resta fa dos homes).

Aquí, com dalt, '=' pot interpretar-se com a 'fan' o com a 'igual', i en paral.leles circumstàncies, això és

7 homes - 3 homes = 4 homes

en l'accepció que fan quatre homes, o de la igualtat mantinguda en els mateixos homes; però passant als exemplars i als estructurals també pot prendre l'accepció d'una qualsevol igualtat, etc.

La possibilitat de l'anàlisi s'esgota quan s'arriba al darrer element d'una estructura, a la darrera cosa (unitat). Però en una segona accepció es resta quan desapareix quelcom: tinc una moneda, l'he de donar, per tant no en tindré cap; en la primera resta es desconsidera quelcom, en la segona desapareix: en les restes pròpies s'individua el restant com a resultant, hi ha una possibilitat d'anàlisi; en el fet de llevar tota l'estructura o tota la unitat, no n'hi ha.

La resta és doncs cabdalment una anàlisi d'una estructura numèrica, amb l'afegit que l'última resta és simplement la seva desaparició.

La unitat essent la cosa sembla que la seva desaparició és alhora la del nombre. En efecte es podria creure que usem el nom 'zero' (o '0') com un terme sinònim a 'cap cosa': de fet en "aquest paper no és negre" s'està determinant el paper, i no és una reflexió lingüística; el 'no' més aviat el descobreix la determinació formal i afirmem després que hi ha hagut un aprenentatge de les formes, pel qual és correcte l'ús de 'no és negre' quan es determina un paper blanc; l'afirmació "no hi ha cap home" (o "cap moneda" o "cap ~~nombre formal"~~ forma numèrica") no determina res que sigui home (o moneda o ~~nombre formal~~ forma numèrica), per això *0* no sembla cap nombre concret, sinó el dibuix convencional que usem quan, determinant, trobem quelcom on no hi ha cap home (etc.): aquí es determina el que es troba, i és la reflexió lingüística la que determina 'no', 'cap' o '0'.

"0" no podent-se usar com a ~~no essent~~ cap nombre concret no entraria en la sèrie del nombre estructural. D'altra banda el nom de 'nombre' per als abstractes prové de l'ús del mot 'nombre' ~~del fet que entren~~ en les nombres concrets o estructurals: '0' conseqüentment no sembla podent-se usar com a ~~ser cap~~ nombre abstracte. Però és una xifra: escrivim '10', quelcom que fa un ús prou ~~prou~~ divers de '0'.

Per tant si no hi afegeixo cap home, a tres homes, no hi ha síntesi més gran possible. Les «sumes» d'homes amb cap home inclouen jocs lingüístics, perquè no hi ha una relació no formal. No cal així que existeixi la suma d'un nombres abstracte i zero. En conclusió a

"3 homes + 0 homes = 3 homes"
"3" + 0 = "3"
"3" + 0 = "3"

no hi ha sumes en els primers membres, sinó sols la igualtat en la mateixa cosa o entre coses plurals.

§45. La multiplicació.

1. Si cadascun de quatre homes lliura tres monedes sumarem les tres monedes del primer, amb les tres del segon, del tercer i del quart: repetirem l'operació de la suma de forma acumulativa. Hi ha una equivalència entre els sumands següents

ooo ooo ooo ooo

i cadascun és estructuralment paral.lel a l'altre; llavors s'anomena 'multiplicand' el grup de partida, 'multiplicador' el nombre de grups, i 'resultant' la suma final. Afirmo que multiplico tres monedes per quatre grups i que la resultant són dotze monedes (o que fan dotze monedes). La representació de la multiplicació a partir dels pars ordenats entre els homes i les monedes fa que l'aparició del mateix home tantes vegades com monedes posseeix distorsioni la claredat determinativa[19].

[19] Les concepcions de la multipliació a partir de pars ordenats remunta pel cap baix fins a Cantor, autor que no considera pas que el conjunt de tots els pars ordenats de dos conjunts donats sigui el nombre, sinó que allò que tenim com el producte dels dos nombres de dos conjunts és el nombre de parts ordenats a partir dels seus elements. Si l'ús reiterat de conjunts per part de Cantor — que sembla superflu segons el que anem dient — convidava a fer un

Adonem-nos que no cal que cada grup sigui igual a un altre per a afegir l'un a l'altre; a més val aquí tot el que diguérem sobre la igualtat de resultants en parlar de la suma.

2. Des d'un punt de mira del nombre estructural la multiplicació consisteix en la suma del multiplicand amb un nombre estructural igual, tantes vegades com indica el multiplicador; en el cas de ~~(~~4x3~~)~~, això representaria, quan ho considerem estructuralment, que sumem

1 2 3 4   1 2 3 4   1 2 3 4

una sèrie estructural en perfecta correspondència amb

1 2 3 4   5 6 7 8   9 10 11 12

— o comptem, simplement, les coses que hi ha. (Recordem que els nombres abstractes [illegible] ni els resultats concrets).

3. A l'hora de multiplicar doncs sempre és possible algun compte de la vella, o bé la suma reiterada~~, afora que, amb el temps, acaduixen a mers sabers formal o abstractes~~.

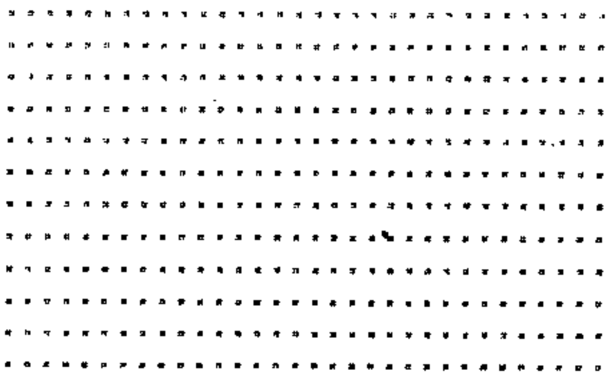
Però en conjunt la nostra tècnica de multiplicar es basa en ~~quatre~~ cinc supòsits independents els uns dels altres, una vegada ~~saben ensenyar els nombres~~ dominem els mots amb uns nombres, cadascun dels quals n'és un <u>sine qua non</u>:

(1) Hem hagut d'aprendre la resultant de les multiplicacions de 1x1 a 9x9 en la nostra cultura (el babilonis, per exemple, tenia taules de 1x1 fins a 59x59), pel sistema, si voleu, d'un quadrat de nou punts de costat, o de nou palets de riu, o dels nous primers ~~nombres formals~~ nous números, fins a saber-ho d'una manera abstracta.

(2) Hem hagut d'aprendre per a dos qualssevol nombres, amb els quals això sigui possible, la propietat commutativa, per exemple en

---

salt més enllà, aquest pas no es troba en l'obra de Cantor, cf. <u>Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre</u>, pags. 285-287.



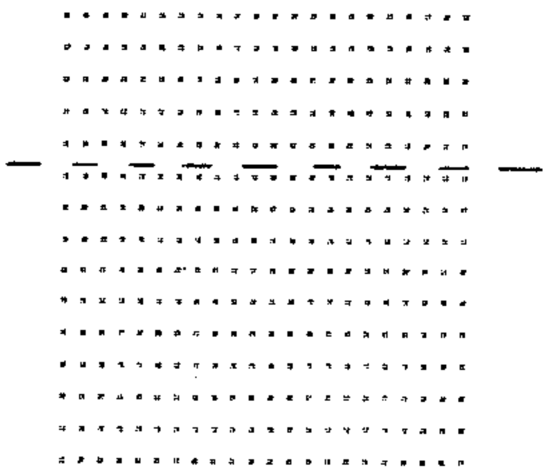
de tal manera que copsem que un rectangle o un quadrat de qualsevol dimensió serà, òbviament, igual a ell mateix.

(3) Però hem hagut d'aprendre així mateix un altre fet capital com és la propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma, això és, que

$$(10+5)\times22 = (10\times22) + (5\times22)$$
$$22\times(10+5) = (22\times10) + (22\times5)$$

$(10+5)\times22 =$

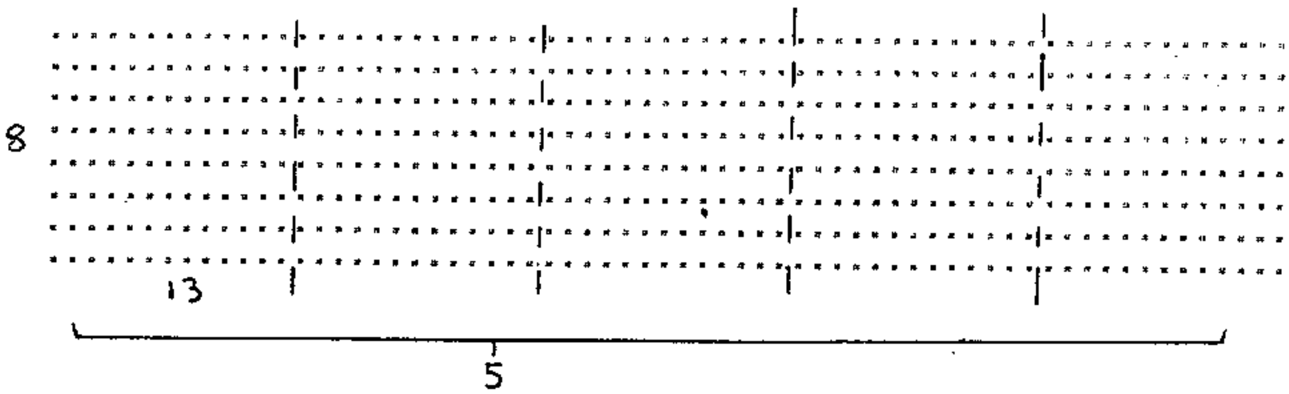
$(10\times22) + (5\times22)$



$22\times(10+5) = (22\times10) + (22\times5)$

i que tampoc no té d'altra base que l'experiència abans de caure en un mer ~~saber formal~~ comportament.

(4) També hem hagut d'aprendre la propietat associativa de la multiplicació, per exemple en



(8x13)x5 = 8(13x5)

on podem perllongar el rectangle tant com vulguem en llargada o en amplada, o fer la part alíquota tan gran com desitgem.

Notem que es pot interpretar la propietat associativa com un cas especial de la propietat distributiva, perquè

8x(13x5) = 8(13+13+13+13+13) = (8x13)+(8x13)+(8x13)+(8x13)+(8x13) = (8x13)x5

(5) Hem hagut d'entendre que una desena, una centena, etc., són unitats ~~i el càlcul per equivalents, i.e. que una desena és equivalent a una altra, i que una desena és equivalent a una centena, etc.,~~ (cf. §41).

4. Llavors també podem establir el següent:

(1) En el cas del producte d'unitats de qualsevol ordre per nombres petits (10x4, 100x4, etc.) basta comptar (sumar) el nombre d'aitals unitats, que és el que nosaltres fem amb el nostre sistema posicional quan escrivim

10x4 = 40

(2) Per a un nombre petit d'unitats de qualsevol ordre multiplicat per un nombre petit (20x4, 200x4, etc.), considerem el producte d'un nombre petit d'unitats pel nombre petit, i.e. 2x4 desenes, 2x4 centenes, etc., i.e. trobo els grups de desenes, de centenes, etc., que hi ha. En el nostre cas

20x4 = 80

(3) Sigui ara que multipliquem un nombre amb unitats de diferent ordre per un nombre petit (14x4): havent-hi la propietat distributiva, multiplico els plurals nombres de les unitats de divers ordre pel nombre petit, i sumo les resultants ((10+4)x4). En el nostre cas

14x4 = (4+10)x4 = (4x4)+(10x4)

(4) En la multiplicació d'un nombre petit per unitats de qualsevol ordre ens basem en la propietat commutativa, i.e.

4x10 = 10x4

(5) Si el nombre petit es multiplica per un nombre petit d'unitats de qualsevol ordre, apliquem així mateix la propietat commutativa, i.e.

4x20 = 20x4

(6) També la usem en multiplicar-lo per un nombre d'unitats de diferent ordre, i.e.

4x14 = 14x4

(7) Quan multipliquem la unitat de qualsevol ~~grau~~ ordre per deu aconseguim la unitat ~~de grau~~ l'ordre superior, i.e.

10x10 = 100
100x10 = 1000

(8) Però quan multipliquem la unitat de qualsevol ~~grau~~ ordre per la unitat de qualsevol ~~grau~~ ordre usem la propietat associativa, i.e.

100x100 = 100x(10x10) = (100x10)x10 = 1000x10 = 10.000

(9) Quan multipliquem un nombre d'unitats de qualsevol ~~grau~~ ordre per la unitat de qualsevol ~~grau~~ ordre usem també la propietat associativa, i.e.

400x10 = (4x100)x10 = 4x(100x10) = 4x1000

(10) I el producte d'una unitat de qualsevol ~~grau~~ ordre per un qualsevol nombre d'unitats segueix (9) per la propietat commutativa, i.e.

10x400 = 400x10

(11) Multiplicand i multiplicador essent nombres d'unitats de qualsevol ordre, les propietats commutativa i associativa resolen també ara l'afer, i.e.

40x50 = (4x10)x50 = 4x(10x50) = 4x(50x10) =
4x((5x10)x10) = 4x(5x(10x10) = 4x(5x100) = (4x5)x100

(12) Quan disposem d'un nombre d'unitats de divers ordre a multiplicar per un nombre d'unitats d'ordre qualsevol —o a l'inrevés — esmercem així mateix les propietats distributiva i associativa, i.e.

$24\times40 = (4+20)\times40 = (4\times40)+(20\times40) = ((4\times4)\times10\cancel{0})+((2\times4)\times100)$

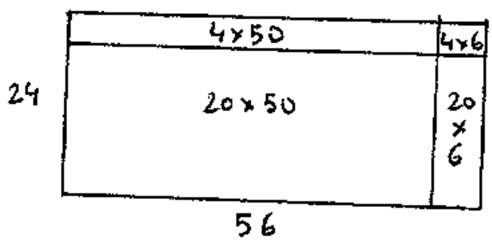
$40\times24 = 40\times(4+20) = \text{etc.}$

(13) Finalment el producte de dos nombres qualssevol (24x56) es descobreix també per les tres propietats com la resultant de multiplicar cada nombre d'unitats de qualsevol ordre del multiplicand per cada nombre d'unitats de qualsevol ordre del multiplicador i sumar tots els productes. Aquesta última és «la multiplicació grega» dels antics: en la nostra actual sumem directament les resultants per a un mateix membre del multiplicador. Seguint l'exemple

$$24\times56 = 24\times(6+50) = (24\times6)+(24\times50) = (4\times6)+(20\times6)+(4\times50)+(20\times50)$$
$$= (4\times6)+((2\times6)\times10)+((4\times5)\times10)+((2\times5)\times100)$$

Per consegüent pobles de l'antigor com l'egipci i el grec que tingueren un sistema numèric de base deu en tenien prou a dominar els productes elementals, les propietats commutativa, distributiva i associativa, i la lògica de ~~l'equivalència~~ les unitats de divers ~~grau~~ ordre, el problema es trobava més aviat en el següent fet: que, independentment dels sons, les nostres grafies per a les unitats de diferent ordre són iguals en l'accepció que són els zeros a la dreta els que indiquen ~~el grau~~ l'ordre de les unitats (si no n'hi ha cap, és ~~el grau~~ l'ordre de partida, si un, de ~~primer grau~~ segon ordre, etc.), i que per tant l'aprenentatge dels productes elementals esdevé alhora per a nosaltres l'aprenentatge de la grafia del nombre d'unitats de qualsevol ~~grau~~ ordre que cerquem, mentre que en escriptures no posicionals això és impossible, i en aquest cas no n'hi ha prou a entendre el producte, sinó que cal cercar la grafia que usem, afer que havia d'alentir considerablement el càlcul. En aquesta accepció el sistema sexagesimal representà un notable avenç pel fet que, alternant la base deu i la base sis per als successius ordres d'unitats, recuperava la grafia de la primera unitat en arribar a la sisena desena d'unitats ~~de grau~~ d'ordre inferior, però la diversa grafia per a les desenes i per a les unitats representaven un obstacle cara a les multiplicacions~~, ahora que l'alternança hauria d'esdevenir un nou maldecap per al càlcul d'equivalents~~: uns taules de l'u per u fins al cinquanta-nou per cinquanta-nou degueren semblar el camí idoni.

5. Val la pena fer la remarca que la tècnica de multiplicar no duu por se a un mer càlcul ~~formal~~ abstracte. En l'exemple podriem veure que



on encara seria possible d'anar descomponent 4x50, 20x6 i 20x50, malgrat que «l'automatisme» a aplicar les propietats i el fet de saber les taules de multiplicar i la tècnica dugui certament a un mer càlcul abstracte. D'aquí que, en conjunt, si atenem les circumstàncies que «ja sabem» les taules del 1x1 fins als 9x9, que «ja dominem» les propietats, que «entenem» les desenes, les centenes, etc., i que qualsevol nombre és una conducta lingüística, la tècnica va desembocant arreu en un càlcul abstracte, malgrat que en qualsevol cas <u>totes</u> les seves bases siguin fets d'experiència. En d'altres paraules: essent una conducta lingüística des de les seves bases, cosa que no implica que no segueixi l'experiència, esdevé finalment una conducta lingüística-abstracta capaç de reiterar-se d'una manera indefinida: l'acceptació de quasevol producte entre nombres enormes es basa doncs en l'acceptació d'uns tals nombres (cf. § 42) i en l'acceptació de les bases de la multiplicació (i per conseqüent de la suma).

En efecte de manera quotidiana nosaltres ja no sentim la necessitat de pensar (en un sentit) la multiplicació: ens hem après la taula de multiplicar des de l'u per l'u al deu per deu; en multiplicar un nombre per qualsevol potència de deu, ja el considerem amb els zeros corresponents, i en multiplicar dos qualssevol nombres superposem senzillament les sumes del cas.

I les igualtats formals resultants rebien les propietats commutativa, associativa i distributiva respecte de la suma.

6. La multiplicació no és més que un cas de suma, i val tot el que s'ha dit abans sobre la igualtat i sobre la circumstància que el càlcul numèric es fa sobretot a través dels nombres exemplars i dels nombres estructurals i abstractes, les igualtats dels quals s'impliquen mútuament.

Cal afegir que en

"4 homes" x 0 = 0
"4" x 0 = 0
4 x 0 = 0

el signe '=' expressaria si més no una igualtat formal (entre '0' i '0'): la forma '4 homes x0' seria potser una forma que s'usa com '0'.

En d'altres multiplicacions (nombres exemplars, estructurals i abstractes) 'x' o '.' esdevenen signes-recordatoris per a reiterar la suma del multiplicand, en uns nombres, o un mer signe per a l'aprenentatge.

En qualsevol cas val la pena recordar que els nombres concrets són estructuralment paral.lels als exemplars i als estructurals

(d'aquí llur utilitat en ~~el càlcul~~ les coincidències numèriques)

7. Afegim ara un afer terminològic: en conjunt la resultant de multiplicar dos nombres es diu 'múltiple' tant de l'un com de l'altre; i cadascun rebrà el nom de 'submúltiple' en tant que -- ho veurem⊥ -- és la resultant de dividir el múltiple per l'altre nombre. Es tracta doncs d'un cas de la part i el tot ~~(§ 41)~~, amb el ben entès que aquí la part mínima té el nom de la unitat entera, i que el tot és un múltiple.

⊥ en un altre lloc

§ 46. La divisió.

1. Tenint dotze monedes tal com

ooo ooo ooo ooo

i.e. una colla de grups on cadascun té una peculiar estructura paral.lela a l'altre, dèiem que anomenem 'multiplicand' el primer grup, 'multiplicador' el nombre de grups, i 'resultant' el total.

Ara també podríem canviar de noms i anomenar 'dividend' aquella resultant, 'divisor' el nombre de grups i 'quocient' el nombre d'elements d'un grup: en efecte la divisió és en un primer sentit l'operació inversa de la multiplicació, per la qual distribuïm (repartim) un nombre concret o estructural entre una colla de grups (estructuralment paral.lels), operació en la qual se cerca precisament el nombre d'elements d'un grup qualsevol; això és:

3	x	4	=	12
multiplicand		multiplicador		resultant
dividend		divisor		quocient
12	:	4	=	3

Per tant si tenim dotze monedes i sabem el nombre de grups estructuralment paral.lels en els quals les volem distribuir, la divisió cercant quantes monedes hi haurà en un qualsevol dels grups (i.e. el quocient), he de cercar aquell nombre de monedes que multiplicat pel nombre de grups tingui com a resultant dotze monedes.

I tot el que s'ha anat comentant a propòsit de la multiplicació a partir de nombres concrets, estructurals i ~~formals~~ abstractes val respectivament per a la divisió~~; en qualsevol cas l'ús de '=' és si més no entre resultants (quan no s'esmenta sols formalment).~~ , etc.

+cf

2. Considerem ara que hem de repartir (distribuir) les dotze monedes entre quatre homes i fem-ho a través d'una tècnica rudimentària: lliurem-ne primer una a cadascun, després fem una segona volta, i veurem que, en acabant, exhaurim les monedes en la tercera volta. Podríem representar-nos el còmput total de monedes tal i com ho férem més amunt, on el nombre de monedes d'un qualsevol grup es correspon amb les voltes que hem fet, perquè en lliurem una a cadascun en cada volta, i on el nombre de grups es correspon amb el nombre d'homes.

Versemblantment uns tals comptes de la vella haurien contribuït decididament a l'estudi de la divisió com a operació inversa de la multiplicació, però tant les tècniques d'algunes civilitzacions prou antigues (per exemple l'egípcia) com el tractament dels quebrats fan albirar que els quocients s'entendrien des de molt aviat a partir d'aquell nombre que multiplicat pel divisor tingués el dividend de resultant. Observi's si més no que les passes lògiques de la distribució per inversió de la multiplicació i les de la distribució pels repartiments d'un a un esdevenen camins particularitzadors.

3. Les certeses i les incerteses de la divisió són doncs les certeses i les incerteses de la multiplicació; per això <u>temptegem</u> el nombre que multiplicat pel divisor ens lliuri el dividend per algun mètode coherent amb la multiplicació.

De fet la nostra tècnica numèrica de la divisió es basa a anar trobant un reguitzell d'unitats successivament d'ordre menor, el producte de cadascuna de les quals pel divisor es resta reiteradament del dividend mentre cadascun d'aquests productes és el més alt possible abans de sobrepassar el nombre del dividend (o el restant que va quedant) i mentre admetem ~~per l'equivalència~~ la propietat distributiva del producte respecte de la suma i que per tant el nombre cercat és la suma d'aquelles unitats d'ordre divers. Valgui com a exemple

9282	34
− <u>6800</u>	200
2482	70
− <u>2380</u>	3
0102	
− <u>102</u>	
000	

on l'afer de la posicionalitat de les xifres (i.e.la repetició per a unitats de divers ordre) no esdevé cabdal.

4. Notem que la igualtat de resultants entre operacions no implica que no hi hagi una específica originalitat de cada camí, que els aprenentatges ~~formal~~ abstractes amaguen. Valgui el cas de

(8:4)x5 = (8x5):4

A. 1 2 | 3 4 | 5 6 | 7 8

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

(sèrie equivalent)

B.
1,2,3,4,5,6,7,8,1,2 | 3,4,5,6,7,8,1,2,3,4 | 5,6,7,8,1,2,3,4,5,6 |

7,8,1,2,3,4,5,6,7,8

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 (sèrie equivalent)

D'alguna manera cada camí és un viatge lògic meravellós, que es comprova quan pensem en nombres concrets estructuralment equivalents: si hom vol multiplicar per cinc les monedes resultants de 8:4, el primer camí imagina algunes monedes en la multiplicació, però el segon representa un considerable viatge intel.lectual i imaginari.

Segueixi el lector amb nombres exemplars:

5x(8:4) = (5x8):4
(12:2)x(6:3) = (12x6):(2x3)
15:(18:6) = (15x6):18
(12:2):3 = 12:(2x3)
(6:2):(9:3) = (6x3):(2x9).

La igualtat de resultants, però la diversitat lògica de camins, palesa que les regles dels productes i de les divisions entre nombres enters i divisions, de les dividions entre divisions i dels productes de divisions són fruit de l'experiència numèrica.

§ 47. Els nombres fraccionaris.

1. En trossejar un pastís en tres trossos tenim d'una banda l'equivalència entre el pastís com un tot i un qualsevol dels trossos; d'altra banda el pastís és igual als tres trossos, això és

1 pastís és equivalent a 1 tros
1 pastís és igual a 3 trossos

Ara bé els homes fem pastissos, ens en regalem, en comprem, en venem, etc., però els nostres forns no fan pas parts de pastissos ni és possible de trobar una part que abans no hagués estat una part de tot el pastís; el mateix ús del mot 'part' suposa sovint que se l'acompanyi d'un mot per a la unitat anterior d'on és, com a nova unitat, una part. Certament tot això que es diu del pastís val per a les unitats de mesura que usem socialment, que creiem interessants, que són útils, etc.; hi ha unitats que hem privilegiat, l'anàlisi de les quals lliura «parts»: la circumstància de posar nous noms a les parts unitàries en palesa les preferències.

Així hom usa '1/3 de pastís' en lloc de '1 tros de pastís', de tal manera que en la segona unitat usem '2/3' i en la tercera '3/3'. No es tracta doncs primerament d'una relació entre dos nombres, sinó d'un nou nom per a la unitat. Tanmateix el nou nom també és mnemònic perquè resulta de l'efectiu trossejament de la unitat preferent, d'haver comptat les noves parts (3) i de prendre'n una (1/3), dues o la segona (2/3), tres o la tercera (3/3): el trossejament de l'individu anterior de referència i el seu recompte són pressupòsits de l'ús dels nous noms.

Alhora, mentre trobem indubtablement la significació lingüística corresponent en l'ús d'uns tals noms, si més no en els afers ostensius hi ha de fet cabdalment la determinació de les noves unitats ("1/3 de pastís" és una unitat).

Llavors

1 pastís és equivalent a 1/3
1 pastís no és igual a 1/3
1 pastís és igual a 3/3

La darrera igualtat, com sempre, és en la mateixa cosa, on 3/3 és un nombre concret, síntesi de les diferents parts, malgrat que la mantenim aquí com una simple igualtat (o, naturalment, pot tractar-se d'una igualtat entre dues qualssevol coses).

2. Les fraccions o els quebrats són nombres els noms dels quals s'escullen a patir del trossejament d'un model que rep el nom preferencial d''unitat'[30].

La problemàtica dels quebrats esdevé per consegüent aliena als nombres estructurals; però, com sempre, els nombres estructurals poden jugar amb l'equivalència de les noves parts: les correspondències entre la unitat modèlica i els nombres quebrats tenen paral.lels estructurals amb les correspondències entre el nom de la unitat abstracta i una sèrie estructural corresponent.

---

[30]Compari's per exemple amb la següent noció de quebrat: «We shall define the fraction m/n as being that relation which holds between two inductive numbers x,y when xn=ym. This definition enables us to prove that m/n is a one-one relation, provided neither m or n is zero. And of course n/m is the converse relation to m/n.

From the above definition it is clear that the fraction m/1 is that relation between two integers x and y which consists in the fact that x=my. This relation, like the relation +m, is by no means capable of being identified with the inductive cardinal number m, because a relation and a class of classes are objects of utterly different kinds», i afegeix en nota: «of course in practice we shall continue to speak of a fraction as (say) greater or less than 1, meaning greater or less than the relatio 1/1. So long as it is understood that the relatio 1/1 and the cardinal number 1 are different, it is not necessary to be always pedantic in emphasising the difference» (B.Russell, Introducion to mathematical philosophy, pàgs.64-65), on sembla que el nombre fraccionari pròpiament no existeix i per tant una tal noció aniria en contra de la història dels nombres. La definició del nombre natural com a classe de classes i la voluntat de deduir les consideracions numèriques de l'aparell lògic segurament tendeixen a fer malinterpretar els altres nombres: no negaríem pas la presentació d'una qualsevol mena de nombres, sinó que això substituís els motius (històrics i individuals) de llur acceptació.

Tractant-se d'un canvi de noms, l'estudi numèric de les fraccions s'exerceix sobretot amb nombres exemplars (la unitat dels quals ha de poder trossejar-se: per exemple segments) i amb nombres estructurals i abstractes; qualssevol altres nombres concrets tenen si més no un paral.lelisme estructural amb els uns i els altres.

3. El lector entendrà que

$$\frac{1}{3} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{3}{3} \qquad \frac{4}{3} \qquad \frac{5}{3} \qquad \frac{6}{3} \qquad \text{etc.}$$

és una sèrie numèrica amb base deu com qualsevol altra, on val allò que diguérem més amunt sobre els nombres grans; això és, el canvi de noms per a les unitats ('un terç' en lloc d''u', 'dos terços' en lloc de 'dos', etc.) no té cap importància. Per tant 5423/3 o és ~~el nom de~~ l'última unitat concreta, etc., o 5423/3 són quatre nombres, les unitats de primer grau, les de segon grau, etc., i totes les operacions (suma, resta, multiplicació i divisió) entre aquestes unitats són simplement les operacions amb dos nombres qualssevol. En donarem, però, unes notes més avall per a major esclariment.

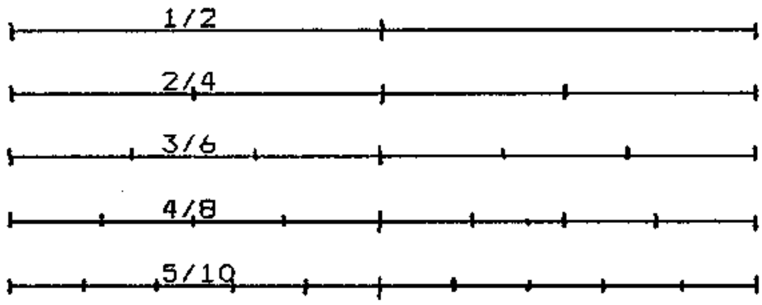
4. Adonem-nos que la sèrie amb base deu dels nombres fraccionaris té un afer interessant quan considerem, seguint l'exemple dels terços, que els tres terços és igual a una simple unitat; es tracta que el pas de la sèrie fraccionària a la sèrie entera té de base tres unitats fraccionàries, això és, mentre la sèrie fraccionària i la sèrie entera són de base deu, el pas de l'una a l'altra és de base tres.

Per això 1 1/3 pot ser considerat un nombre abstracte, o àdhuc la resultant d'un compte concret o estructural, però també com a dos nombres, talment com 13.

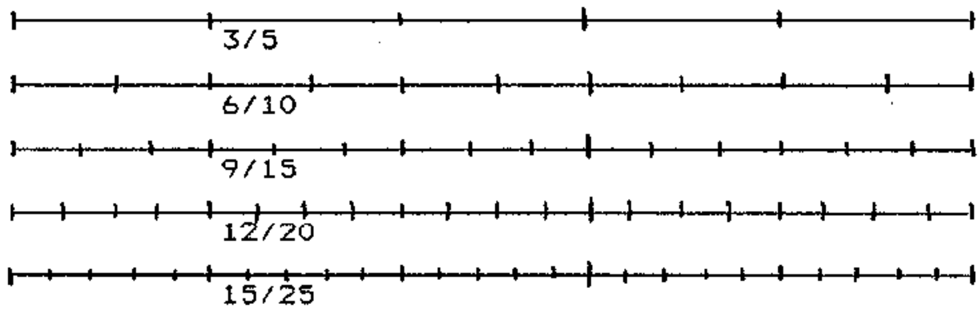
La base de canvi d'unitats fraccionàries a enteres depenent en cada cas de les relacions entre la unitat fraccionària i l'entera corresponent, hi haurà tants jocs com relacions diverses entre ambdues unitats.

Sens dubte una manera idònia de tenir un nombre fraccionari quan treballem amb un sistema numèric de base deu és aquella en la qual la unitat entera correspon a deu unitats fraccionàries, car en aquest cas la base per a passar d'unes unitats a les altres és la mateixa que aquella per la qual passem de les respectives unitats d'un ~~grau~~ ordre a l'inferior o al superior.

5. L'afer de la igualtat (o de la identitat) entre dos nombres fraccionaris es fonamenta, per raons òbvies, en els nombres concrets-exemplars, i precisament en la ~~mida~~ mesura que els nombres fraccionaris són ~~noms per a una~~ síntesi. Observi's:



etc.



etc.

on tenim d'una banda les igualtats de les síntesis corresponents, d'altra un exercici més de nombres (i.e.de nombres naturals) amb el recordatori de la corresponent unitat entera de referència. Però el lector observarà que l'exercici numèric té aquí una base en una ~~lògica de l'equivalència~~ peculiar estructura: en el primer exemple el segment té dues parts iguals, cadascuna essent una unitat (1/2); una nova partició manté una estructura de subparts paral.lela en l'un i en l'altre semisegment; en d'altres paraules, la relació entre l'un semisegment i els dos semisegments es va mantenint per als nous noms del semisegment i dels dos semisegments, ~~perquè sempre~~ comptem un nombre doble de subparts del tot respecte del semisegment, cosa que s'anomena multiplicar per dos el nombre de subparts del primer segment; i precisament el nom del nombre de subparts del semisegment es refereix a una tal resultant del tot...

Fins aquí l'afer es manté en la lògica de la posicionalitat (amb les corresponents afeccions numèriques); ja diguérem que l'aprenentatge de la multiplicació entre nombres petits pressuposa una història individual (o col.lectiva) posicional (amb l'afecció corresponent) i singulars càlculs per equivalència (cf. § 41), que es perllonga amb l'estudi de la multiplicació per equivalents entre

~~nombres grans, etc., i amb el domini cada vegada més estintolat dels nombres~~ abstractes ~~formals i del càlcul~~ abstracte ~~formal~~. El primer exercici és sols doncs una exemplificació de comptar dues vegades un nombre igual de parts, exercici que s'incardina en els altres exercicis numèrics (amb fraccions o sense) i en el domini dels nombres.

Si haguéssim partit el segment inicial en tres trossos, llavors la relació dels nombres de la part (1/3) i del tot (3/3) seria la que brolla del nombre de subparts del terç del segment amb un nombre tres vegades més gran, etc., ~~treball posicional que deixem en mans del lector~~. L'afer abastant també el cas de partir el segment en quatre, en cinc, etc., arribem a la regla ~~(formal)~~ següent, resultant del domini numèric (observi's que s'hi inverteix l'ordre lògic de multiplicands i de multiplicadors): si multipliquem el numerador que és una unitat i el denominador d'una fracció per un mateix nombre la fracció és igual (o idèntica).

En el segon exemple el segment tenia cinc parts iguals i en prenem tres (3/5); la nova partició mantindrà una estructura de subparts paral.lela entre dos qualssevol cinquens; la relació entre els tres cinquens (3/5) i el tot (5/5) es mantindrà per als nous noms dels tres cinquens i dels cinc cinquens perquè sempre haurem de comptar un nombre triple de subparts respecte del nombre de subparts de la cinquena part (1/5) davant d'un nombre quíntuple de subparts respecte del nombre de subparts de la cinquena part, cosa que s'anomena multiplicar per tres i per cinc, respectivament, el nombre de subparts d'un cinquè; i precisament el nom del nombre de subparts dels tres cinquens es refereix al nombre de subparts del tot.

La repetició per a d'altres casos, la generalització i la formalització corresponent (a més del domini numèric) duen a la regla: si multipliquem numerador i denominador d'una fracció per un mateix nombre la fracció és igual (o idèntica)[24].

Remarquem que la igualtat de fraccions sols es dóna pròpiament entre nombres concrets (exemplars), i que les corresponents sèries estructurals i els nombres abstractes es diuen iguals per aquella identitat o igualtat.

6. Un dels problemes de la suma i de la resta de fraccions es troba a saber què sumem o restem: 1/3 d'unitat exemplar més 1/3 és 2/3 -- però 1/3 més 1/6 essent dues unitats, el seu nom no pot ser ni 2/3 ni 2/6 sense jugar a l'equívoc.

D'aquí que calgui la conversió a unitats iguals abans de sumar-les, i.e.

1/3 = 2/6
2/6 + 1/6 fa 3/6

---

[24] Noti's que les fraccions són un cas de la part i el tot en tant que investiguem el numerador i el denominador, no en tant que ~~els seus~~ la consideració abstracta de noms de fraccions ~~numèrics~~ (1/2 i 2/4, per exemple) ~~mantenen~~ contempla un joc numèric de «múltiples i submúltiples» ~~(e.g. ... i ...)~~. D'altra banda és una part i un tot ~~que no permeten que~~ en els quals la unitat entera ~~rebi el nom d'una fracció~~ ha de ser un nom ad hoc.

on cal doncs, de manera prèvia, la cerca de la primera igualtat; ~~per tant~~ com sempre en

$$2/6 + 1/6 = 3/6$$

'=' pot prendre diverses accepcions.
~~perquè coneixem la igualtat (o la identitat) de resultants.~~ → cf.

El lector podrà extreure fàcilment com aconseguim comuns denominadors i les regles de la suma, com sigui que la suma de fraccions amb igual denominador és ben bé el mateix afer que la suma entre dos nombres enters qualssevol.

7. ~~La multiplicació de fraccions consisteix a sumar tantes vegades la fracció com digui el multiplicador. Ara,~~ La multiplicació d' una fracció per un nombre no fraccionari consisteix a sumar tantes vegades la fracció com diu el nombre:

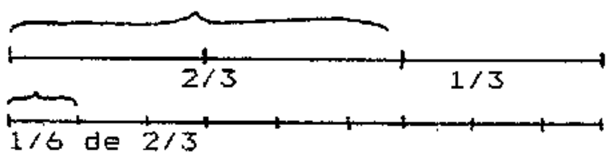
2/3 x 4 és com 2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3, que fa 8/3
2/3 x 1 fa 2/3

raonant tal i com ho férem en parlar de la multiplicació. ~~Podem també trobar igualtats com a conseqüència de la igualtat de resultants.~~ → cf.

8. En el cas ~~d'un producte~~ de la multiplicació d'una fracció per una altra fraccio cal atendre al fet que el nombre n/n correspon justament a les unitats del multiplicand, i.e.

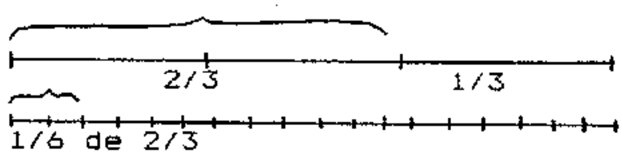
2/3 x n/n fa 2/3

perquè "n/n" assenyala que sols he d'agafar una vegada 2/3; per tant en multiplicar 2/3 per 1/6 totes les unitats de 6/6 corresponen a 2/3; 2/3 és la unitat referent per al nou càlcul, i 1/6 és la part que se cerca d'aquesta unitat. Llavors es tracta de buscar una nova unitat fraccionària amb la qual anomenar la quantitat que se cerca. <u>L'operació demana, com abans, que es faci una nova partició</u>:



<u>Ha calgut el tempteig experimental</u> per a descobrir la quantitat que entra en 1/6 de la fracció 2/3. Però el nom per a la part 1/6 de 2/3 és -- el segment considerat com la unitat -- ~~de~~ '1/9'.

Si haguéssim partit cada unitat 1/3 en 6 unitats, això és



llavors les 2/3 unitats serien iguals a 12/18, i caldria sols prendre una sisena part (o dividir per sis), això és, 2/18, igual, és clar, a l'anterior 1/9.

Aquest segon camí té la sort de simplificar l'aprenentatge ~~del~~ la multiplicació ~~producte~~ d'una fracció per una unitat fraccionària: basta multiplicar els dos denominadors, i conservar el numerador del multiplicand. Per tant

$$\underline{p}/\underline{q} \cdot 1/\underline{m} \text{ fa } \underline{p}/\underline{q}.\underline{m}$$

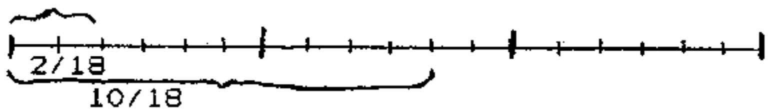
la igualtat

$$\underline{p}/\underline{q} \cdot 1/\underline{m} = p/\underline{q}.\underline{m}$$

~~és sempre de resultants o en la resultant~~[22]. permet, com sempre, diverses lectures de '='.[22]

El lector podrà observar que si el nombre d'unitats fraccionàries del multiplicand és un múltiple del nombre d'unitats fraccionàries de la unitat entera del multiplicador bastarà distribuir les unitats del multiplicand entre les unitats fraccionàries de la unitat entera del multiplicador.

Si la fracció multiplicadora no té per numerador la unitat, llavors $\underline{p}/\underline{q} \cdot 1/\underline{m}$ fa $\underline{p}/\underline{q}.\underline{m}$, això és, hi ha $\underline{p}/\underline{q}.\underline{m}$ unitats fraccionàries tingudes en compte per cada unitat fraccionària del multiplicador; llavors si n'hi ha $\underline{n}$ en el multiplicador, hi haurà $\underline{n}$ grups de $\underline{p}/\underline{q}.\underline{m}$, això és, llur producte; si 2/3 . 5/6



i com sempre es poden anar repetint exemples ~~posicionals~~ amb particions, divisions i multiplicacions, fins arribar ~~a particions imaginàries, als singulars càlculs per equivalents, etc., i~~ a la tècnica simplificada de l'aprenentatge i al càlcul abstracte ~~formal~~ après, d'on tenim

$$\underline{p}/\underline{q} \cdot \underline{n}/\underline{m} \text{ fa } \underline{p}.\underline{n}/\underline{q}.\underline{m}$$

S'observarà també ~~El lector podrà també observar~~ que si el nombre d'unitats fraccionàries del multiplicand és un múltiple del nombre d'unitats fraccionàries de la unitat entera del multiplicador n'hi ha prou a distribuir les unitats del multiplicand entre les unitats fraccionàries de la unitat entera del multiplicador i de repetir tantes vegades la resultant com unitats fraccionàries hi ha en el multiplicador.

~~[22] Tornem a repetir que el signe '=' pot usar-se com 'fa' o a tall d''opera com', però allò rellevant es troba en el fet que no cal usar-lo així, que pel cap baix es pot usar com 'igual'.~~

[22] No és innecessari de creure, si ací no quan abandonem els nombres exemplars i usem només nombres abstractes, que '=' pugui interpretar-se també a tall d'un 'opera com'.

→ partició

(Entenem la multiplicació d'un nombre enter per una fracció: quan el primer és un múltiple del nombre d'unitats fraccionàries de la unitat entera del multiplicador es distribueixen les unitats enteres entre les unitats fraccionàries de la unitat entera del multiplicador i es repeteix tantes vegades la resultant com unitats fraccionàries hi ha en el multiplicador. Si aquest no és el cas, ~~llavors~~ per exemple cal multiplicar 4 per 1/6, les quatre unitats corresponen al nombre 6/6: l'afer demana prèviament la ~~discriminació de la realitat~~ -- en les quatre unitats no n'hi ha sis (6/6) -- per tant he de canviar d'unitats numèriques, per exemple dic que hi ha, per un treball de partició, 12/3 o 24/6, i llavors la distribució és fàcil: si el nombre 6/6 correspon a les 4 unitats (ara 12/3 o 24/6 unitats), llavors 2/3 (o 4/6) són les unitats del multiplicand que corresponen a la unitat 1/6 del multiplicador; si el multiplicador fos 2/6, llavors hauria de considerar-se un nombre doble, etc.).

9. La divisió amb fraccions ve definida a partir de la multiplicació i com a operació inversa: la divisió de 2/3 entre 4 té com a quocient aquell nombre que multiplicat per 4 fa 2/3, això és

$$\underline{x}.4 = 2/3$$

llavors cerquem un nombre que multiplicat per 4 sigui igual a 2/3: òbviament es tracta d'un nombre fraccionari, alhora que hem de convertir el nom de la resultant 2/3 per tal que pugui ser un múltiple de quatre; escollim per exemple 4/6, i llavors el nombre cercat serà 1/6, o escollim 8/12, i llavors el nombre cercat serà 2/12, etc. En tots els casos, havent après a multiplicar enters i fraccions per enters, l'experiència numèrica ens va assenyalant el camí de la regla ~~forma~~l: per a dividir una fracció per un nombre enter basta multiplicar el denominador pel nombre, i deixar el mateix numerador.

Paral.lelament la divisió entre un nombre fraccionari i un altre nombre fraccionari té per quocient un nombre que multiplicat pel divisor faci el dividend: tenint a dividir per exemple 3/4 entre 1/2, el quocient cercat fa que

$$\underline{x}.1/2 = 3/4$$

on 3/4 és el nombre d'unitats fraccionàries del multiplicand que corresponen a la unitat 1/2, per tant el multiplicand en tenia 6/4 (que correspon a 2/2). En el cas de dividir 3/4 per 2/5, llavors

$$\underline{x}.2/5 = 3/4$$

on 3/4 és el nombre d'unitats fraccionàries del multiplicand que corresponen a 2/5; però les tres unitats de 3/4 no són múltiples de les dues de 2/5: cal reconvertir ~~el nom de~~ 3/4 a, per exemple, 6/8; tornem-hi: 6/8 és el nombre d'unitats fraccionàries del multiplicand que corresponen a 2/5, per tant 3/8 és el nombre d'unitats fraccionàries del multiplicand que corresponen a cada unitat (1/5) del multiplicador, per tant el multiplicand té 15/8 unitats. L'experiència numèrica ens va assenyalant el camí d'una regla: per a dividir una fracció per una fracció basta multiplicar el numerador del multiplicand pel denominador del multiplicador i el denominador del multiplicand pel numerador del multiplicador, la primera resultant com a nou numerador, la segona com a nou denominador (i.e. multiplicar la primera per la inversa de la segona).

Si cal finalment dividir un nombre enter per un nombre fraccionari, per exemple 2 entre 1/2, llavors

$$\underline{x}.1/2 = 2$$

on les dues unitats són el nombre d'unitats del multiplicador que corresponen a la unitat 1/2, per tant tot el multiplicador tindrà quatre unitats; si es tracta de dividir 2 entre 3/2, llavors

$$\underline{x}.3/2 = 2$$

on les dues unitats corresponen a les tres unitats (3/2) del multiplicador, però 2 no és cap múltiple de 3, d'aquí la necessitat del canvi de nom per a la resultant: en lloc de '2' prenem per exemple '6/3', i llavors 6/3 són les unitats que corresponen a les tres unitats (3/2) del multiplicador, per tant 2/3 són les unitats que corresponen a cada unitat (1/2) del multiplicador, i llavors el multiplicand tindrà 4/3 unitats (per a 2/2 del multiplicador), etc. L'experiència ens acondueix a la regla que basta multiplicar l'enter per la fracció inversa del divisor.

10. La divisió essent aquella operació per la qual cerquem un nombre (el quocient) que, col.locat com a multiplicand en una operació que té el divisor com a multiplicador, tingui el dividend com a resultants, això és

$$8 : 2 = \underline{x} \quad \rightarrow \quad \underline{x}.2 = 8$$

fem valer la inversió per a tota mena de nombres; a

$$1 : 4 = \underline{x} \quad \rightarrow \quad \underline{x}.4 = 1$$

no hi ha cap nombre enter que multiplicat per quatre faci la unitat, és cert, però nosaltres sí que hem vist ja que podem multiplicar una fracció per un nombre enter, i llavors sols cal cercar aquest nombre.

Cal remarcar la possibilitat d'una igualtat formal entre la divisió de dos nombres i la fracció corresponent, això és

1 : 4 = 1/4 (1/4 .4 = 1) (1)
2 : 3 = 2/3 (2/3 .3 = 2) (2)
7 : 5 = 7/5 (7/5 .5 = 7) (3)

igualtat formal que s'entén pel fet que (1) cerquem un nombre que multiplicat per un enter (el multiplicador) faci la unitat: per tant aquell nombre és una unitat fraccionària que té com a referent una unitat entera amb tantes unitats fraccionàries com unitats enteres té el multiplicador; (2) cerquem un nombre que multiplicat per un enter (el multiplicador) faci un altre nombre enter: essent la resultant menor que el multiplicador el nombre que cerquem és una fracció; però llavors hem de convertir el nom de la resultant -- '2' -- a un nom fraccionàri que té com a referent una unitat entera amb tres parts; llavors 2 és igual a 6/3, i cerquem un nombre que multiplicat per 3 faci 6/3, obtenint 2/3; (3) si la resultant del producte és un nombre més gran que el multiplicador, però no n'és cap múltiple, llavors operem com en el cas anterior.

Per tant el paral.lelisme formal entre divisions i fraccions nó acondueix de cap de les maneres a una obvietat.

11. A la circumstància que les divisions menin a fraccions formalment iguals cal afegir l'assimilació de les formalitats d'operacions amb divisions i d'operacions amb fraccions (cf. §§46 punt 4, §47 punts 7-9,11-12), per tant es poden utilitzar unes mateixes regles per a totes les operacions amb divisions i per a totes les operacions amb fraccions; les regles d'aprenentatge de les operacions amb fraccions es prenen com les regles d'aprenentatge de les operacions amb divisions, i a l'inrevés:

- en la suma de fraccions basta sumar els numeradors quan els denominadors són iguals; si no ho són, s'hi fan. Això val també per a la suma entre divisions, quan assimilem numeradors i dividends, denominadors i divisors.

- en la multiplicació d'un nombre enter per una divisió (o per una fracció) o d'una divisió (o d'una fracció) per un nombre enter multipliquem el nombre enter pel dividend (o numerador), i deixem el mateix divisor (o denominador).

- en la multiplicació de divisions (o de fraccions) multipliquem dividends (o numeradors) i divisors (o denominadors), cada resultant conservant el seu ordre.

- en la divisió d'un nombre enter per una divisió (o per una fracció), multipliquem el nombre enter pel divisor (o pel denominador) i la resultant fa el nou dividend (o numerador), agafant el primitiu dividend (o numerador) com a nou divisor (o denominador) -- si dividim una divisió (o una fracció) per un nombre enter deixem el mateix dividend (o numerador) i multipliquem el nombre enter pel divisor (o denominador) com a nou divisor (o denominador).

— en la divisió de divisions (o de fraccions) multipliquem el primer dividend (o numerador) per al segon divisor (o denominador) per a trobar el nou dividend (o numerador), el producte dels altres dos termes fent el nou divisor (o denominador).

I ha estat en definitiva l'experiència la que ens hi confirma.

12. Fixem-nos que hom pot perdre els trets no merament 19
lingüístics del càlcul de fraccions pels mateixos motius que el perd en els nombres enters: en conjunt perquè ja dominem els nombres abstractes, les sumes abstractes, els productes abstractes i les divisions abstractes, és a dir, perquè tenim ja unes tals conductes lingüístiques; fet i fet presentem el càlcul de fraccions des d'uns tals supòsits, altrament hauríem de recomençar per a cada fracció i operació tot el que diguérem a propòsit del compte d'enters, de la suma d'enters i de la multiplicació fins arribar a la pròpia conducta abstracta de les respectives operacions (i de les seves inverses). La novetat no rau aquí, doncs a trobar nombres molt grans (però en principi amb una unitat simple concreta), ni en les operacions abstractes bàsiques, sinó a aprendre a resoldre d'una manera abstracta (i en acabant a través d'una regla) nous problemes que són de l'experiència tenint en compte que hem adquirit ja una conducta lingüística. Els nous problemes en efecte es deriven que no sols hi ha l'afecció numèrica quotidiana, sinó que s'hi inclou l'afecció d'un referent (l'enter), alhora que partim (o apleguem) parts i que hem concebut què podria significar la multiplicació d'un nombre fraccionari (o enter) per una fracció, afer que ens duu a noves manipulacions de la fracció multiplicand.

Potser sigui curiós d'anotar de passada el següent: una vegada hem après la conducta de partir una part (o unes parts) —— la divisió de la part (o d'unes parts) per un nombre més gran sempre pressuposa la prèvia partició —— la podem reiterar ad libitum pel simple fet de lliurar-hi un nombre abstracte: aquí també admetem una tal conducta per la pròpia experiència que hem anat tenint en particions que no són merament una conducta lingüística. Però un tal fet (com el fet d'un nombre molt gran, sigui enter o no) no és res d'extraordinari, sinó que s'incardina en la sèrie de registres del tipus «tots els homes que han viscut», «els afers més petits», etc., registres que són expressius, i que tenen un substrat en el fet que hi ha homes que podem veure o que hi ha coses més petites que unes altres: el nombre fraccionari molt petit (com el nombre molt gran) tenen unes tals significacions, i els contruïm a partir de les conductes lingüístiques que hem après des d'allò que no és sols conducta lingüística.

¿Què és finalment una regla? Doncs una conducta lingüística que respon al nostre domini dels nombres abstractes i de les operacions, que resol una resultant a trobar sense que ens lliuri tal qual —— en una part important de casos —— cap pista que ens orienti sobre l'acceptació d'una tal resultant.

§ 48. Els nombres decimals.

1. En trossejar una cosa en deu parts hi ha de bell nou una unitat fraccionària

que va rebent els següents noms en la nostra grafia:

'1/10''2/10''3/10''4/10''5/10''6/10''7/10''8/10''9/10''10/10' (i '11/10', etc.)

això és, són noms recordatori de la circumstància que la unitat preferida, o presa com a model, està bastida per deu unitats resultants de la partició, de tal manera que

$$10/10 = 1$$

Com diguérem dalt el nombre fraccionari s'origina bàsicament a partir dels nombres concrets o exemplars, però sempre hi ha una ~~sèrie~~ nombre estructural paral.lel~~a~~, i les relacions d'unitats modèliques a subunitats són paral.leles a les relacions entre unitats estructurals a subunitats estructurals, i l'aprenentatge ens acondueix als nombres abstractes.

El compte del nombre fraccionari no té més inconvenients que el compte amb qualsevol altra unitat: les unitats fraccionàries segueixen la base deu, és a dir, cada deu unitats fraccionàries de primer ordre fan un tot, una unitat de grau superior, talment com ho fa qualsevol altra sèrie d'unitats fraccionàries (per exemple la sèrie que va des del primer terç fins al desè terç), les segones deu fan un altre tot, les terceres deu fan un altre tot, les quartes deu un altre..., les novenes deu fan un altre tot: però llavors tenim deu grups, etc. Es tracta, com en qualsevol altra sèrie numèrica, que nosaltres estudiem deu unitats fraccionàries i ens adonem que fan un tot, i que en tenir deu unitats i tres unitats més, l'afer pot rebre una representació gràfica simple tenint una grafia per al tot i la corresponent grafia per a les tres unitats restants: el nostre sistema posicional ho fa admetent que el nom per al tot és '10' i que llavors queden tres unitats (representades a través del nom '3'), conjunt que se simplifica amb la grafia '13', però que qualsevol altra grafia no posicional resol ('XIII' en la romana), amb el ben entès que '13/10' recorda que el nostre model d'unitat no és aquella amb la qual comptem, etc.

D'altra banda ací, com dalt, podria partir cada unitat fraccionària en deu parts: però la unitat modèlica tenia abans deu unitats fraccionàries; si ara faig que cadascuna sigui trossejada en deu parts, hi haurà tants grups de deu com unitats fraccionàries tenia la unitat entera, per tant deu grups de deu, per tant allò que jo anomeno una centena (suma que també anomenem multiplicar deu per deu), etc., en tots els casos arribant a un càlcul amb nombres abstractes, mentre que en cada cas la sèrie numèrica dels nombres fraccionaris seria la sèrie que sempre uso.

2. Les fraccions amb un referent modèlic que conté deu unitats no presenten cap novetat respecte a les altres fraccions pel que fa a la conversió a d'altres fraccions iguals i a les operacions entre enters i fraccions i entre fraccions, i per això remetem el lector a la secció precedent.

La novetat estreba en la circumstància que, partint del nostre cas de la unitat 1/10, en arribar a la desena unitat fraccionària, on cal prendre la grafia d'una nova unitat perquè treballem amb base deu, precisament en aquest punt hi ha la coincidència que el canvi a una unitat de grup superior pot ser considerat el fet que hom copsa de bell nou la unitat modèlica, perquè, presa la cosa exemplarment, s'acomplex la igualtat de

$$10/10 = 1$$

on la pluralitat de noms no canvia la naturalesa exemplar (però sí la significació lingüística); fet i fet aquella igualtat és d'experiència tal i com hem anat entenent l'experiència, és a dir, com a quelcom que inspeccionem d'una manera efectiva o no. Notem doncs que la partició d'una unitat entera, el compte, la igualtat de deu parts amb la unitat entera, va esdevenint una conducta que acaba essent el domini que deu parts són una unitat entera, és a dir, acaba essent la conducta lingüística abstracta, conducta que s'incardina en el domini abstracte dels nombres. Per això, mentre podríem anar atenent l'experiència (i les afeccions del llenguatge) el domini de la igualtat 10/10 = 1, la reiteració en una segona desena d'unitats fraccionàries, i el domini abstracte dels nombres ja duu a la conducta lingüística que «hi ha tantes unitats enteres com desenes en el nombre fraccionari»

Si tinguéssim cinquanta-dues unitats fraccionàres hi hauria cinc unitat enteres i dues unitats fraccionàries, això és

$$5 \quad 2/10$$

que podem també representar per d'altres noms, i llavors per

$$5 \quad 0,2$$

o àdhuc

$$5,2$$

que cal considerar, des del punt de mira de l'anàlisi, com dos nombres: cinc unitats enteres i dues de fraccionàries.

Paral.lelament, i ja en plena conducta lingüística basada en el domini de la relació entre les parts i la unitat entera, de les relacions entre estructures, i en el domini de com bastim les unitats d'ordre superior i de la multiplicació abstracta, 1 centena són 10 desenes, 5 centenes són 50 desenes, etc., 1 miler són 10 centenes, etc., per tant

5/10	o 0,5	
20/10		2
600/10		60
3000/10		300
etc.		

on constatem ja una regla: per a passar del nombre fraccionari amb un referent enter que té deu parts, al nombre enter basta prendre el nombre de desenes com el nombre d'unitats enteres, el nombre de centenes com el nombre de desenes en el nombre de les unitats enteres, el nombre de milers com el nombre de centenes en el nombre de les unitats enteres, etc.

Si tenim el nombre 3620/10, llavors el nombre d'unitats enteres serà 362; si 3625/10, llavors 362 i 5/10 o 0,5, que podem escriure 362,5; per això la regla ens diu que per a passar del nombre fraccionari amb un referent enter que té deu parts (i.e.de la fracció decimal) al nombre enter o decimal basta corre la coma un lloc a l'esquerra, amb el ben entès que 3620/10 correspon llavors a 362,0.

3. Tornant ara a la nostra partició de cada unitat fraccionària en deu trossos a fi d'aconseguir la unitat 1/100, en aquest cas

100/100 = 1

afer que encara pot no ser una mera conducta lingüística, això és, tenir una exemplaritat, i llavors raonaríem com dalt; per tant hi haurà tantes unitats enteres com centenars en el nombre de les unitats fraccionàries; però si n'hi ha milers hi haurà deu unitats enteres (que és una desena) per cada miler d'unitats fraccionàries, i hi haurà tantes desenes en el nombre de les unitats enteres com milers en el nombre de les unitats fraccionàries, etc., representant el nombre d'unitats fraccionàries que no arriben a la centena per una segona plaça després d'una coma, les desenes del nombre d'unitats fraccionàries per la plaça immediatament després de la coma; així doncs

24/100	o 0,24	
500/100		5
8000/100		80
70.000/100		700

amb la qual cosa el nombre 78.500/100 serà el nombre d'unitats

1 d'una altra manera i llavors fer

enteres 785 (la igualtat seria un simple afer de nombres grans); i el nombre 78.524/100 serà el nombre d'unitats enteres 785 i 24/100 o 0,24, que podem representar/ ~~per~~ 785,24. Per això la regla diu que per a passar d'unitats fraccionàries a unitats enteres o a nombres decimals basta corre la coma dues posicions cap a l'esquerra.

4. Quan la unitat entera té mil unitats fraccionàries gairebé és segur que ja es tracta d'una conducta lingüística (cf. § 47 punt 12), on

$$1 = 1000/1000$$

reflecteix més aviat el nostre saber lingüístic que, quan numerador i numerador són iguals, som en la unitat entera, i on ja considerem, quasi per imitació dels càlculs anteriors, que els milers del nombre de les unitats fraccionàries són les unitats enteres, etc.; que el nombre 347/1000 pot representar-se també amb la grafia '0,374', etc., i que per tant la regla fa: per a passar l'expressió fraccionària d'un nombre quebrat a l'expressió del nombre enter o decimal corresponent, la unitat entera tenint mil unitats fraccionàries, basta córrer la coma tres llocs a l'esquerra, etc.

L'aprenentatge doncs ens fa concloure la regla que per a passar d'una fracció decimal a un nombre decimal basta córrer la coma tants llocs cap a l'esquerra com zeros té el denominador o, invertint l'ordre, i com fàcilment pot extreure el lector, que per a passar d'un nombre decimal a una fracció decimal basta córrer la coma tants llocs a la dreta com zeros té el denominador, on 'nombre decimal' és un nom que s'usa ~~per als enters i~~ per als conjunts d'un enter i/o d'una fracció expressada per xifres que segueixen la coma.

Però també val la pena d'accentuar una vegada més que tots les bases per al canvi de fraccions decimals a nombres decimals (o a l'inrevés) es troben en l'experiència, en l'accepció que s'hi troba l'aprenentatge d'una conducta lingüística del tipus 10/10 = 1 o fins i tot 100/100 =1, que s'hi troba l'aprenentatge de la conducta lingüística del donar nom dels ~~a usar els~~ nombres abstractes i de relacionar-los ~~(per tant de relacionar estructures)~~, que s'hi troben les multiplicacions, de tal manera que tota la base esdevé des de l'experiència abans que les respectives conductes (la de partir una unitat, la de comptar i la tècnica de base deu per a donar nom, la de multiplicar) basteixin nombres que només poden ser conductes lingüístiques, recursos lingüístics del tipus de «tots els homes», «les coses més petites», etc., i que sols acceptem perquè hem après les bases.

5. El lector podrà adonar-se que s'acompleix

1/10 = 10/100
1/10 = 100/1000 10/100 = 100/1000
etc. etc.

que alhora concorda amb la regla que, multiplicant numerador i denominador per un mateix nombre, la fracció és igual. També concorda amb la lectura, segons diversos nombres, d'una expressió numèrica de més d'una xifra, això és, 5,254 pot ser considerat com un nombre, l'abstracte; però pot ser considerat com dos nombres, el 5 i el 0,254; alhora podem considerar 0,254 com tres nombres a partir ~~del grau~~ de l'ordre de les unitats (i.e. 0,200; 0,050; 0,004 o 200/1000, 50/1000, 4/1000); però per la identitat dels diferents ordres d'unitats fraccionàries amb una unitat (entera corresponent), també pot ser tractat com l'agrupament dels tres nombres 2/10, 5/100, 4/1000; d'altra banda també s'hi valen els agrupaments 25/100, 4/1000 o 2/10, 54/1000.

6. és bo de veure que es mantenen els paral.lelismes formals entre les divisions per deu, etc., i les fraccions decimals (cf. § 47 punt 10).

7. L'afer ~~absolutament~~ de cap a cap rellevant de les fraccions decimals rau a poder-les tractar, a l'hora de les operacions, tal i com tractem els nombres enters, i d'aquí que l'expressió decimal es prefereixi en prou casos.

En efecte la suma de dos nombres decimals s'esdevé com la suma de dos nombres enters qualssevol, amb la sola nota que cal saber quin ordre d'unitats se suma: perquè la primera xifra a la dreta de la coma representa les dècimes (parts), la segona les centèsimes (parts), etc., la primera a l'esquerra de la coma les unitats enteres, la segona les desenes, etc., mentre sabem que 10/10, etc., són unitats enteres.

8. La multiplicació amb decimals demana alguns esclariments: perquè la multiplicació entre dos nombres decimals o entre un nombre enter i un de decimal (o a l'invers) es basa en la multiplicació de les corresponents fraccions decimals, o del nombre enter i la corresponent fracció decimal (cf. § 47 punts 7-8); en efecte sembla sols <u>a través de les fraccions decimals que aprenem a multiplicar els nombres sencers com si fossin nombres enters i a córrer la coma tants llocs a l'esquerra com xifres decimals hi ha en els nombres decimals</u>.

9. La divisió entre dos nombres, un dels quals pel cap baix és decimal, es basa en el caràcter invers de la multiplicació i de la divisió, perquè si

48,25 x 36,65 fa 1.768,3625

això és

$$\frac{4825}{100} \times \frac{3665}{100} \quad \text{fa} \quad \frac{17.683.625}{10.000}$$

llavors

$$1768{,}3625 : 36{,}65 \quad \text{fa} \quad 48{,}25$$

o

$$\frac{17.683.625}{10.000} : \frac{3665}{100} \quad \text{fa} \quad \frac{4825}{100}$$

Si el càlcul de divisions de fraccions ja ens donaria

$$\frac{17.683.625 \times 100}{10.000 \times 3.665}$$

que, per una conversió (aplegant unitats) faria aquella resultant, el camí més fàcil[3] es troba a considerar el dividend com un nombre d'unitats enteres i el divisor com un nombre d'unitats enteres, talment que, en acabar, correm a l'esquerra la coma tants llocs com llocs indiqui la diferència de xifres decimals del dividend i del divisor.

En el cas que el dividend no tingui cap xifra decimal caldrà afegir-hi tants zeros com xifres decimals tingui el divisor, car es tracta d'un problema de la pròpia representació del nombre decimal, això és

$$40 \times 34{,}15 \quad \text{fa} \quad 1366$$

des de

$$40 \times \frac{3415}{100} \quad \text{fa} \quad \frac{136.600}{100}$$

Si el dividend té menys xifres decimals que el divisor, llavors afegirem tants zeros com estableixi la diferència.

10. Adonem-nos que, en dividir dues unitats entre tres, o bé cerquem una fracció que multiplicada per tres faci dues unitats, o podem partir cada unitat en deu trossos, fent 20/10: en aquest cas no tinc cap nombre decimal que hi correspongui (la grafia 2,0 és en principi la d'un nombre enter), però l'afer és el mateix, car es tracta de trobar un nombre que multiplicat per tres faci 20 (dècims), la coma del qual -- són dècims -- l'hauré de córrer una vegada a l'esquerra.

Però podria fer 200/100 i la divisió, corrent la coma dues vegades a l'esquerra -- són centèsims --, etc.

La il.lustració permet veure que, en dividir un nombre enter per un altre nombre enter, puc afegir tants zeros com vulgui al

---

[3] Es podria seguir també un altre camí: el fet de considerar la divisió formalment igual a la fracció esmentada, i.e. 1.768.362.500 : 36.650.000, cf.així mateix els punts 10 i 11.

divisor, amb l'única condició de comptar tots aquests zeros com a xifres decimals.

Si el dividend ja era decimal tots els possibles zeros afegits es consideraran també com a noves xifres decimals.

I si el divisor és una potència de deu bastarà córrer la coma del dividend tants llocs com zeros contingui el divisor.

Tots els casos es veuen perfectament quan ens expressem amb fraccions, per exemple

$$85{,}7392 : 3{,}28 \quad \text{fa} \quad 26{,}14$$

$$\frac{857.392}{10.000} : \frac{328}{100} \quad \text{fa} \quad \frac{2614}{100}$$

però

$$\frac{8.573.920}{100.000} : \frac{328}{100} \quad \text{fa} \quad \frac{26.140}{1.000}$$

etc.

11. ¿Com convertirem una fracció no decimal en una fracció decimal (i en un nombre decimal)?

La troballa d'una unitat entera que tingui una potència de deu d'unitats fraccionàries n'és un camí segur: es parteix cada unitat fraccionària de la fracció que cal traspassar a expressió decimal en un nombre tal de nous trossos, que la resultant d'unitats fraccionàries per a la unitat entera sigui justament una potència de deu, i comptem llavors el nombre d'unitats fraccionàries que tenim, que es refereixen al nombre d'unitats fraccionàries de la unitat entera. Així passem de 1/5 a 2/10, de 1/4 a 25/100, etc.

Una segona variant faria: donada la fracció a convertir, el denominador remet al nombre d'unitats fraccionàries que conté la unitat model. Però si volem passar aquella fracció a una fracció decimal és obvi que les úniques particions a fer de la unitat entera han de ser amb base a deu, això és, partim la unitat entera en deu trossos, després, si cal, cada tros en deu altres trossos, etc. Llavors caldrà distribuir els nous trossos decimals de la unitat entera entre el nombre d'unitats fraccionàries de partida de la unitat entera, i prendre tants grups resultants d'aquesta divisió com indiqui el nombre d'unitats fraccionàries de la fracció a convertir. Si cal passar 1/5 a expressió decimal, parteixo en deu trossos la unitat, i ara he de distribuir els deu trossos entre les 5 unitats fraccionàries, amb la resultant de dues, i per tant 2/10 o 0,2; havent-hi 3/5, llavors la resultant faria 6/10 o 0,6. Si se surt de 1/4, llavors 10 es distribueix entre 4, amb una resultant de 2, però restant 2, que cal de nou partir i distribuir entre 4, amb nou quocient 5: ha calgut una segona partició, que fa la unitat entera de 100 trossos, i un nombre ~~expressió~~ decimal de 25/100 o 0,25, etc. El lector observa que es tracta d'una divisió entre la unitat, a la qual s'afegeixen tants zeros com sigui necessari, i el nombre del denominador, i de la posterior multiplicació pel nombre d'unitats fraccionàries.

Però una tercera variant esdevé encara més directa: perquè si tota divisió es converteix en una fracció formalment igual (3 : 5 i 3/5) i per tant tota fracció és igual a la resultant d'una divisió formalment igual (cf. § 47 punt 10); si a més a més sabem ja dividir dos qualssevol nombres, sigui el dividend més gran, igual o més petit que el divisor (punts 10-11) amb quocients enters o decimals, llavors, mentre, per exemple, 3 : 5 = 3/5,

$$3 : 5 = 30/10 : 5 = 6/10 = 0{,}6$$

això és, la fracció a convertir és igual a la resultant de la divisió formalment igual estudiada d'acord amb la base deu i per un sistema decimal que segueix també la base deu.

§49. Notes sobre l'aritmètica.

1. Apuntem ja algunes conclusions, per exemple que el càlcul numèric és un càlcul lògic: en considerar

$$\frac{25}{37} : \frac{40}{17} = \frac{25}{37} \cdot \frac{17}{40} = \frac{25\times17}{37\times40} = \frac{425}{1480}$$

hi ha els propis individus (nombres) abstractes alhora que sovint repassem la sèrie de nombres abstractes i entre ells [illegible] ~~tot determinant~~ del nombre estructural~~ment~~; a més és cert que hem après de memòria les taules de la suma, de la resta, de la multiplicació i de la divisió, a més de les regles respectives, però l'aplicació successiva d'aquest aprenentatge mantè un ordre de discurs: en l'exemple primer inverteixo la fracció (i.e. faig una nova determinació lògica que és la resultant d'un seguit de ~~determinacions~~ passes lògiques: tenint 'A, B', faig una 'B' igual a la primera i després una 'A' igual, finalment canvio l'ordre i resta 'B,A'); la reflexió –– hi ha hagut un aprenentatge –– multiplica numeradors i denominadors (ergo noves determinacions lògiques), però per fer-ho ha d'haver-hi un reconeixement constant dels nombres abstractes alhora que un gran respecte a l'ordre de les determinacions. Hi ha doncs una lògica numèrico-abstracta molt rigorosa –– un hom s'educa en aquest aprenentatge perquè l'acompleixi al peu de la lletra, les posibilitats de reiteració de les operacions són indefinides i dos qualsevol nombres abstractes poden ser immediatament presos com a punt de partida de les operacions. Per tant el càlcul numèric també té aspectes calidoscòpics.

¿Per què acceptem el càlcul numèric? En una primera accepció perquè és una tècnica d'escurçament, ens estalvia llargues marxes reflexives. és clar que es basa en la confiança del manteniment de la lògica o, si un hom vol, de la realitat, en l'accepció que un hom hi determina racionalment: però aquesta adhesió neix del fet que es va determinant així. El càlcul numèric és una conseqüència de la lògica sense més adjectius, ~~general~~ quan nosaltres l'acceptem en la nostra generació (i.e. tenin algun nombre concret, afegim coses a coses, ens trobem relacionant, etc., fins i tot abans d'educar-nos en una disciplica: però de fet no ens hi eduquen directament, sinó a través dels nombres concrets); n'és una conseqüència també de tal manera que s'obvia en aquesta lògica abstracta la lògica numèrico-concreta i estructural d'on procedeix, alhora que és també lògica real perquè és la seva pròpia lògica, és capaç de mantenir-se així autònoma i és capaç de simplificar-se fins i tot com a càlcul a través de nous càlculs, o de derivar nous càlculs des de primitives lògiques numèriques.

Però en una altra accepció allò que ens proporciona el càlcul numèric no ho podríem pas fer d'una altra manera. Hem anat repetint que qualsevol nombre és un comportament lingüístic: tres homes és una síntesi (o el seu registre), hi ha una afecció lingüística; alhora l'equivalència entre unitats d'iguals ordre es ben bé un comportament extralingüístic i lingüístic, que acaba essent simplement lingüístic, com ho són les reiteracions en una qualsevol direcció; totes les operacions acaben essent així mateix comportament lingüístics, etc.: els nombres i les seves relacions van esdevenint doncs un llenguatge numèrico-abstracte, en principi sense circumscripció, per tant que pot anar desplegant-se il.limitadament, més enllà de qualsevol nivell d'inspecció: fet i fet el paper de l'afecció lingüística va creixent per graus des d'una unitat concreta (que pel que fa a af~~f~~ecions sols conté la del mot 'unitat') seguint camins capriciosos fins adquirir la conducta lingüística que anomenem càlcul numèric (abstracte), que enclou ~~doncs~~ per tant la seva pròpia lògica lingüística.

2. és segur doncs que sense les afeccions lingüístiques seria impossible una qualsevol aritmètica fins i tot abans de reiterar-se sobre si mateixa en nombres grans (o en unitats massa grans) o en unitats massa petites, que són forçosament mer llenguatge: l'aritmètica és doncs, àdhuc en plena activitat inspectora, un afer sols possible pel llenguatge, una conducta (inspectora, què ho és); però això de cap de les maneres no pot voler dir que l'aritmètica tingui com a base un afer lingüístic sense més malgrat que el descabdellament numèric hi arribi.

Agafem per exemple l'afecció numèrica que conté un nombre: s'hauria d'entendre en principi com un recurs lingüístic del tall dels «resums lingüístics» (cf. § 6 ~~tres~~), això és, «quatre homes» hauria de valer com «la darrera hora d'estudi», «la jornada de treball» o fins i tot «els homes», «sempre que...», «cada vegada que...», etc. Ja diguérem (cf. § 19 ~~tres~~) que el contingut lògic que supera l'experiència finita ha de ser enclòs a la manera d'un contingut lingüístic, però això no implica que sigui sols una afer lingüístic, com sigui que pot haver-hi experiència: hom pot resseguir aquest moment, després aquest altre, etc., malgrat que sols ho puguem «recollir» d'una manera lingüística (és aquesta la manera humana de considerar-ho: no podem superar la nostra finitud), amb l'afegit que la seva veritat i falsedat depenen dels fets extralingüístics.; alhora, i en especial per a les coses, hom no pot determinar més que una cosa, després una segona, després una tercera, etc.: fins i tot en el cas de dar-se alhora en l'experiència, «les tres coses» (o «les mil coses») és un recurs lingüístic, un «resum», una conducta lingüística per una síntesi, perquè no podem superar la facticitat determinativa, però això no implica tampoc que es tracti d'un mer afer lingüístic perquè hom comptar una cosa, dues coses, tres coses, etc., i ~~és la~~ l'experiència la que revalida o rebutja les nostres afeccions lingüístiques, malgrat que tampoc no podem «recollir» una història determinativa més que com afecció, etc.[24]

En conjunt hem pogut anar resseguint en efecte que no hi ha cap fet bàsic en la teoria numèrica que no remeti a l'experiència, que no la tingui com a avaladora abans de ser adquirida la conducta lingüística corresponent, que es reitera ja com a mer comportament lingüístic: (1) hi remeten el compte i la confecció dels ~~nombres~~ mots numèrics; (2) per tant hi remeten la suma i la multiplicació, així com les seves propietats elementals que no es deriven simplement de (1); (3) hi remet qualsevol saber sobre paral.lelismes estructurals; (4) hi remet la partició d'una unitat (notem que les investigacions amb quebrats sols introdueixen això com a novetat); (5) hi remet qualsevol criteri d'igualtat. No sembla que n'hi hagi més: les conductes lingüístiques que s'hi aprenen essent vàries i encreuant-se subtilment, afegim sols que les regles del càlcul no serien més que una expressió simplificada de les maneres de trobar resultants des de les dades, regles que s'establirien a partir de conductes apreses prèviament.

---

[24] El paral.lelisme entre els llenguatges quotidians i el llenguatge numèric podria potser dur-se fins i tot més enllà: perquè a la determinació "aquest home" li correspondria la determinació "un home", però al registre de l'un el registre de l'altre; després al registre «les coses» li podrien correspondre els abstractes; a registres del tall de «tots els homes» o «totes les coses» els nombres més grans possibles, com als «afers més petits» les unitats massa petites, etc., de tal manera que les vicissituds dels nombres són comparables a les vicissituds del llenguatge en conjunt, i a l'ús del llenguatge quotidià d'una manera desimbolta li podria correspondre la conducta lingüística del càlcul numèric, salvant sempre arreu les significacions lingüístiques específiques, això és, les conductes lingüístiques diverses en els diversos usos lingüístics.

una

~~Per tant la base del càlcul numèric rau en el fet que una síntesi té anàlisi de coses, o que diferents coses tenen una síntesi, de raonar posicionalment una tal síntesi i anàlisi tantes vegades com un hom vulgui en plurals casos, de reiterar-se damunt les pròpies resultants sintètiques o partint les pròpies coses analitzades fins arribar a l'extrem que fem valer la raó de síntesi i anàlisi enllà de qualsevol posició tant per baix com per dalt (unitat meravellosa) e per a d'altres unitats que no han estat analitzades. Les formes dels nombres acompanyant la síntesi i l'anàlisi, en acabar calculem més pel camí dels nombres abstractes que per d'altres camins: hi ha hagut un aprenentatge. que s'ha fixat formalment.~~

3. No sembla que calgui postular noves capacitats humanes per a entendre una mica l'aritmètica. Quan per exemple el gran matemàtic Henri Poincaré afirmà que «aquesta regla [la regla del raonament per recurrència], inaccessible a la demostració analítica i a l'experiència, és el veritable tipus de judici a priori. D'altra banda hom no podia pas fantasiejar de veure-hi una convenció, com per a alguns dels postulats de la geometria. Per què doncs aquest judici s'imposa a nosaltres amb una evidència irresistible? és que no és res més que l'afirmació del poder de l'esperit que se sap capaç de concebre la repetició indefinida d'un mateix acte des del moment que un tal acte és possible. L'esperit té d'aquest poder una intuïció directa i l'experiència no pot ser res més per a ell que una ocasió d'utilitzar-lo, i per això de prendre'n consciència. Però, direu, si l'experiència bruta no pot legitimar el raonament per recurrència, ¿passa el mateix de l'experiència ajudada per la inducció? Veiem successivament que un teorema és vertader del nombre 1, del nombre 2, del nombre 3 i així cap endavant, la llei és manifesta, diem, i ho és amb igual dret que tota llei física recolzada en observacions, el nombre de les quals és molt gran, però limitat. No podríem desconèixer que hi ha aquí una analogia sobtant amb els procediments habituals de la inducció. Però hi subsisteix una diferència essencial. La inducció, aplicada a les ciències físiques, és sempre incerta perquè es recolza en la creença d'un ordre general de l'univers, ordre que és exterior a nosaltres. La inducció matemàtica, això és la demostració per recurrència, s'imposa contràriament d'una manera necessària perquè no és sinó l'afirmació d'una propietat de l'esperit mateix»[25]: una primera lectura duria segurament a admetre que la repetició indefinida no és «una convenció del tall dels postulats de la geometria» (tot i que és possible que hi hagi un cert equívoc en l'expressió) ni es pot experimentar (en l'accepció de dur-la a terme); però la recurrència indefinida no necessita versemblantment de res més i sembla que hi hagi aquí l'oblit que l'aritmètica també és una activitat humana: en aturar el procés d'anar sumant -- valgui aquest molt senzill cas -- encara hi ha la possibilitat d'imaginar ~~de trobar~~ ~~o d'acostar~~ una nova suma,

---

[25] La science et l'hypothèse, pàgs.23-24.

creiem que el prodriem continuar, afecció que brolla de l'activitat reiterada i que fa comprendre que la sèrie de les operacions és «indefinida». A més a més caldria potser distingir entre la confiança nascuda per la reiteració (i repetició) d'operacions i la generalització (per la qual establim que $a+b=b+a$, etc.) com a variant[26].

4. Noti's que allò que sols pot tenir una existència de contingut lògic lingüístic s'enumera de vegades com una expressió del nostre domini numèrico-lingüístic (per exemple quan comptem punts); en d'altres casos haurem de cercar pautes lingüístiques específiques (en especial per a ~~1~~ zero i infinit), etc.

D'altra banda les bases de l'aritmètica tenen també un suport extralingüístic, l'esclariment del qual i de les seves connexions amb les resultants apreses esdevé així mateix un procés de racionalitat: llavors la base del càlcul numèric rauria en la cosa, sigui una síntesi de coses o una mera cosa; es tracta d'una raó que, analitzant, relacionant, individuant i sintetitzant, considera qualsevol estructura entre coses precisament en tant que coses o individus, i estudia les estructures d'homes, de gossos, de formes numèriques, etc., en tant que no hi ha manera d'individuar algun membre d'aquestes estructures que no sigui susceptible per això mateix de ser anomenat 'cosa' i 'un'.

Per tant la teoria numèrica té com a base un estudi lògic de moments analítics i sintètics, de relació i d'individuació, estudi lògic que conté, precisament en els moments analítics i sintètics, de relació i d'individuació, i — fins i tot des dels primers moments — les corresponents afeccions sense les quals seria impossible el compte, l'ús d'allò après per a finalitats, la confiança en els aprenentatges i en les formalitzacions, etc. Si

---

[26] En qualsevol cas una tal distinció seria de matís i no exclouria ~~que afectéssim~~ l'afecció en una fórmula tant del domini numèric pel qual copiem amb lletres allò representat en xifres com d'una reiteració: caldria doncs donar la raó a Poincaré quan fa intercanviables la inducció i la reiteració. D'altra banda Hilbert — per tal de citar un autor d'un altre tarannà — diferencia la inducció completa (que facilita la propietat commutativa, valgui el cas) i la definició per recurrència (que caldria aplicar, per exemple, a la funció 1x2x...xN)(cf. Grundlagen der mathematik I, pàgs.265ss i 287ss, respectivament: de fet recull la distinció d'altres matemàtics que també anomenen 'per inducció' la definició esmentada), però es fa veritablement difícil de capir que la propietat commutativa no inclogui un raonament per recurrència o que una operació del tipus 1x2x...xN no contingui una inducció. En d'altres paraules el nostre doble matís no és el que diferencia inducció i recurrència, sinó el domini del nombre que duu a la generalització per lletres i l'afecció de prosseguir les operacions (afecció que pot recaure en lletres o en xifres).

hom vol parlar així: aquell estudi lògic és alhora estralingüístic i lingüístic i l'home domina i dirigeix el moment lògic conjunt.

Ara bé tot és susceptible d'esdevenir subjecte d'una teoria numèrica -- si voleu: res no resta fora de l'aritmètica --en l'accepció que és possible (i racionalitzant l'afer) l'ús del mot 'cosa' o del mot 'unitat' (segons les particulars afeccions) per a un qualsevol individu, usem el mot per a quelcom que s'està donant en carn i ossos o l'usem per a quelcom que sols és registre. Però aquesta circumstància no implica que amb la cosa i amb les estructures de coses i d'unitats resolguem els nostres afers: les coses són homes i gossos, colors i volums, ciutats i punts, etc.; admetem 'cosa' i 'unitat' (no usant-los a la manera de registres) com a mots-jòquer quan només hi ha nombres en l'accepció que només hi ha homes, gossos, etc., o només hi ha volums, colors, ciutats, punts, etc. La cosa i l'estructura de coses són els afers més rics en l'accepció que no hi ha res que s'hi escapi, però alhora no hi ha cap cosa (superant l'ús com a registre) que no sigui per això mateix home, gos, lletra, punt, etc.; en d'altres paraules: la utilitat del mot 'cosa' no és indefinida perquè les coses són vàries.

5. Notem que podríem parlar del càlcul numèric com d'un càlcul formal, (1) en l'accepció que hi pensem formes; en tot cas caldria recordar que no hi pensem <u>sols</u> formes, sinó mots[27], llenguatge (formes amb afecció). (2) En l'accepció que atenem la sintaxi del càlcul numèric; si més no una tal sintaxi seria aquí una resultant, una conducta apresa, i una tal sintaxi depèn directament dels aspectes semàntics ($2\times2 = 4$, $3\times5 = 15$, etc.): una separació radical entre els aspectes semàntics i sintàctics seria sens dubte un afer quimèric, i tant l'una com l'altra semblen sols aspectes comportamentals del càlcul numèric, és a dir, d'un llenguatge[28].

---

[27]Observi's que un mot pot ser (1) un so o un dibuix que pertany simplement a la llengua, (2) quelcom que enclou una <u>significació</u> lingüística, per tant l'afer es presta ja a una certa equivocitat; en el text hem usat si més no 'forma' en l'accepció de quelcom acústic o visual -- en la línia de (1) --, malgrat que un hom ho podria usar en la línia de (2), però en aquest cas no ens seria útil la contraposició entre forma i llenguatge.

[28]Els nombres abstractes tenen certament una significació lingüística i estimem -- sembla obvi -- que la sintaxi del càlcul és un esdeveniment lingüístic. Un hom podria estat temptat doncs a contraposar els elements lingüístics significatius (semàntics) a allò que és sols significatiu lingüísticament d'una manera sintàctica: ara bé, a nivell del càlcul aritmètic amb nombres abstractes les regles sintàctiques semblen inseparables de les afeccions semàntiques, i segurament esdevé més encertat de creure que així com aprenem l'ús de '2' d'una manera abstracta a partir de dos punts (per exemple), hi ha també un altre aprenentatge per a la suma abastracta $2+2 = 4$ tant a partir del domini dels nombres

(3) En l'accepció dels formalismes del tall del de Hilbert pels quals els nombres no són ens separats de les coses i de qualsevol inspecció (els nombres serien símbols concrets), sempre que no oblidem que de fet aquí comptem coses, i.e. que la circumscripció a símbols del tall de les xifres hilbertianes esdevé irrellevant. Nosaltres acceptaríem doncs la conducta lingüística de l'aritmètica a partir de consideracions que ni són nombres abstractes ni tenen la seva sintaxi lògica i pel fet que és extraordinariament útil en les nostres estudis. Per tant el paral.lelisme entre el constructivisme de les regles operatives i la predicació fregeriana, i l'aritmètica està en el fet que totes formalitzen (en l'accepció que hi ha un ús de formes que tenen una sintaxi), però cadascuna ho fa des dels seus punts de partida: no hi ha una crítica del formalisme per ell mateix, sinó que la crítica s'estableix sobre allò a partir del qual hi ha un procés d'ensinistrament que acondueix a un discurs lingüístic.

§50. El pas cap a l'àlgebra.

1. L'aprenentatge d'un càlcul numèric que no ha estat la resultant d'un treball previ d'adquisició és certament un fenomen de transmissió cultural, però difícilment hom es manté sempre en un mer càlcul abstracte o cal que s'hi mantingui sempre: llavors no sabríem que és una resultant, això és, ignoraríem què és el nombre i què fem.

Acordat que l'univers dels nombres no sempre se circumscriu a mer saber abstracte dels nombres, hom entén que les relacions entre nombres són les que estableixen les comparacions sabudes i les operacions apreses; però una part del nostre hàbit rau a saber comptar, a saber dir un qualsevol nombre, i a una colla d'operacions, alguna resultant de les quals l'hem apresa també, i si més no algunes cultures hem après com arribar a una gran quantitat de les resultants que no sabem de cor.

---

com de les síntesis concretes de dos punts i dos altres punts. En d'altres paraules la sintaxi lingüística seria ja un exponent d'un procés abstractor, generalitzador, formalitzador, que esdevindria d'una manera conjunta als afers semàntics, malgrat que hi puguem accentuar aspectes. Per això val la pena de parlar més aviat del càlcul numèric com d'una resultant. D'altra banda, per a la lògica inspectora, o diríem que no hi ha pas en conjunt aspectes sintàctics perquè no hi ha sobredeterminació, o parlaríem de sintaxi determinativa en l'accepció de la diversitat i de l'ordre de moments (anàlisi, síntesi, relació, simple reflexió) i en la que de fet esmentem el procés lògic. Finalment notem que una qualsevol referència a una sintaxi és una consideració posterior a l'ús lingüístic o a l'afer inspector, versemblantment (i racionalitzant l'afer) degut a la diferència entre la significació lingüística en tant que parlem de quelcom (aspectes semàntics) i la circumstància que el discurs lingüístic té extensió, en el cas lingüístic, o a la diferència entre atendre quelcom o atendre (per exemple) l'afecció que enclou de «procés», en d'altres casos.

Dins d'un cert marge el nombre més o menys abstracte del càlcul numèric ~~formal~~ se circumscriu a ser representant d'ell mateix; d'altra banda el nombre que operat amb un segon nombre ha de ser igual a la resultant de plurals operacions d'altres nombres, afer que podem escriure així

el nombre : 4 = (25 : 3).9

no remet a res més, sembla, que a ell mateix. S'esdevé, però, que nosaltres no sabem de cor totes les possibilitats de joc del càlcul numèric. La manera en concret que resoldrem el nostre problema dependrà, entre d'altres coses, del nostre propi exercici en el càlcul numèric.

Per tant 'el nombre' o 'x' o qualsevol altra lletra que introduïm en el nostre llenguatge de càlcul no sembla remetre en principi a res, ~~seria~~ un registre ~~afectat~~ talment com ~~ho és~~ '5' en considerar-lo de manera abstracta. Certament una racionalització del desconegut ens duu a considerar-lo un nom per a "300", per exemple, o per a una estructura numèrica com "300, 600/2, 900/3, etc.". Es tractava, tanmateix, del «nombre» o de «x» que operat amb 4 és igual a la resultant de les altres operacions: una conseqüència d'haver aconseguit una cultura numèrica habitual.

Per tant l'àlgebra, en una primera accepció, seria un exponent del domini lingüístic, «generalitzaria» el càlcul en la mesura ~~mena~~ que és la conseqüència d'un càlcul esdevingut hàbit racional, i la substitució progressiva dels diversos mots-nombres per d'altres mots no numèrics no és més que un afer de grau en l'habituació des del càlcul[29]. Això és, des de

---

[29]Malgrat la divergència d'objectius hi ha un encert bàsic quan Hilbert afirma que «es tritt also, wie schon die Algebra zeigt, eine Vermehrung der finiten Objekte ein. Bisher waren dies nur die Zahlzeichen wie 1, 11, ..., 11111. Sie allein waren die Objekte inhaltlicher Betrachtung gewesen. Aber schon in der Algebra geht die mathematische Praxis darüber hinaus. Ja, auch wenn eine Aussage noch von unserem finiten Standpunkt aus in Verbindung mit den inhaltlichen Hinweisen zulässig ist, wie z.B. der Satz, dass stets

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ bestimmten Zahlzeichen bedeuten, so wählen wir doch nicht diese Form der Mitteilung, sondern setzen dafür vielmehr die Formel

$$a + b = b + a$$

und diese ist auch gar nicht mehr eine unmittelbare Mitteilung von etwas Inhaltlichen, sondern ein gewisses formales Gebilde, dessen Verhältnis zu den alten finiten Aussagen

$300 : 4 = (25 : 3).9$ o $(5-2).(5+2) = 5^2 - 2^2$
$150 : 3 = (100 : 4).2$ $(10-4).(10+4) = 10^2 - 4^2$

hom fa

$a : b = (c : d).e$ $(a-b).(a+b) = a^2 - b^2$

i cada passa en l'estudi d'una «igualtat» algèbrica seria la conseqüència d'aquella habituació, és a dir

$$a + b = c \quad \longrightarrow \quad a = c - b$$
$$a : b = c \quad \longrightarrow \quad a = c.b$$

perquè

$$8 + 4 = 12 \quad \longrightarrow \quad 8 = 12 - 4$$
$$8 : 4 = 2 \quad \longrightarrow \quad 8 = 2\times 4$$

que es pot anar complicant en la ~~mida~~ mesura que hom va afegint noves operacions a operacions ja indicades. Per tant hom sols «generalitzaria» el càlcul en la ~~mida~~ mesura que ha esdevingut habitual.

2. La funció matemàtica s'hauria de concebre així mateix -- en aquest contextos d'àlgebra elemental -- com un repte de la nostra cultura numèrica i, en conjunt, com un repte de la nostra cultura del càlcul; en una expressió del tall de

$$\underline{x} : 4 = (25 : 3).9$$

la ics no estaria en principi en representant de res, sinó que seria «el nombre» que dividit per quatre ha de ser igual a la resultant de multiplicar per nou la divisió entre vint-i-cinc i tres. Per a

$$\underline{x} : 4 = (25 : 9).9$$
$$\underline{x} : 4 = (25 : 18).9$$
$$\underline{x} : 4 = (25 : 36).9$$
etc.

$$2 + 3 = 3 + 2,$$
$$5 + 7 = 7 + 5$$

darin besteht dass wir in jener Formel für a, b Zahlzeichen 2, 3, 5, 7 einsetzen und dadurch, d.h. durch ein Beweisverfahren -- wenn auch ein sehr einfaches -- diese finiten Einzelaussagen gewinnen. So kommen wir zu der Auffassung, dass a, b, =, +, sowie die Gesamtformel

$$a + b = b + a$$

an sich nichts bedeuten, so wenig wie die Zahlzeichen» (Über das Unendliche, pàg.175).

establim una nova generalització a través de

$$\underline{x} : 4 = (25 : \underline{y}).9$$

on ara 'y' no estaria en principi en representació de cap nombre, sinó que seria el nombre dividint pel qual vint-i-cinc i multiplicant la resultant per nou és igual a la resultant de dividir el nombre ics per quatre. És clar que podem tenir 'x' i 'y' com a noms per a nombres: <u>però la prova que en la funció no treballen com a noms rau precisament, sembla, que no són noms propis de cap nombre en especial, alhora que nosaltres sols hi podríem tenir com a substituts una sèrie finita i circumscrita a uns pocs nombres</u>. La funció doncs estaria en l'expressió '$x : 4 = (25 : 3).9$' o en '$x : 4 = (25 : y).9$'; l'anàlisi lingüística portaria a admetre que el nombre x és funció del nombre $\underline{y}$ (o a l'inrevés), sense que, com a funció, ni x ni y remetessin a res: en la funció serien valors indefinits; si és vol: 'x' i 'y' podrien ser noms per a uns nombres precisament perquè el nombre $\underline{x}$ i el nombre $\underline{y}$ estarien (o podrien estar) en funció — la circumstància que el llenguatge generalitza respecte de la de tenir-los com a noms introduiria sols una diferència, alhora que l'home imita aquests capteniments (§ 34 punt 1).

No sembla doncs que un hom pugui admetre que la funció matemàtica com a tal vulgui dir res més del que vol dir ella en persona: les variables no estarien <u>en tant que funció</u> en representació de res; quan les reemplacem per nombres ja no hi ha funció, sinó una igualtat que és veritat o que és falsa. El mateix nom de 'variable' prové, sembla, que som conscients que podem reemplaçar les lletres per qualsevol nombre, però les lletres no farien de funció en tant que noms (tot i que per això ~~les lletres~~ x i y en tant que membres de la funció puguin ser <u>anomenades</u> variables, cf. §30 punt 4). La <u>funció</u> matemàtica no tindria una part constant i una part que fes de nom en tant que un hom pensa estrictament funció: una funció amb una sola variable es trobaria en el tot format per la variable i la part constant, i a enlloc més; si en té dues, de variables, la funció no estaria mai entre les variables sense incloure-les, alhora que tampoc no remetria a enlloc més en tant que funció. Però sembla que caldria rebutjar del tot un llenguatge que veiés en la part constat una predicació de tal manera que, en $\underline{x}^2 = 4$, calgués veure-hi la predicació per a una $\underline{x}$ de «el seu quadrat igual a quatre», perquè l'afer o remet a la veritat que «cerquem un nombre el quadrat del qual sigui quatre», i tenim la funció ras i curt, o s'entreté en anàlisis lingüístiques de les expressions de les nostres funcions que com a tals sols també diferències en l'expressió de la nostra funció, ja sigui per a tornar a prendre-ho tot com a funció en el sentit escaient del mot, ja sigui per a introduir les variables com a noms abandonant doncs la funció. El desig es troba segurament a superposar l'un i l'altre camí, i tanmateix un hom ha de fer una tria.

II

APUNTS PER A LA GEOMETRIA BÀSICA

Hem entès que l'aritmètica es funda en l'individu i en la circumstància que usem noms; entenem també que no hi ha substitut de la reflexió. Ara cal caracteritzar una disciplina tan gloriosa i antiga com la geometria euclidiana.

Si més no els Elements constitueixen la primera exposició sistemàtica de la geometria anomenada euclidiana que conservem; prou tractats que introduïen modificacions expositives o ampliaren els teoremes i els problemes d'acord amb els principis generals de la ciència han anat apareguent, és clar, al llarg dels segles: els Elements no esgoten la geometria euclidiana i d'alguna manera esdevindria indiferent per a les nostres finalitats l'estudi d'un tractat o d'un altre. Tanmateix els Elements s'han dreçat històricament i fins als nostres dies com el model tant de la geometria euclidiana, com la referència (més o menys fundada) de qualsevol sistema axiomàtic; assajant de considerar la racionalitat geomètrica amb una mica més de detall, no podem defugir el seu estudi: pel cap baix el naixement de les geometries hiperbòliques vint-i-dos segles més tard hagués estat incomprensible (i impossible) sense el domini previ d'aquella geometria.

§51. De l'accés crític als «Elements».

Sens dubte hagués estat prou més simple d'estudiar qualsevol altra obra que no la d'Euclides: nosaltres volent considerar una mica la geometria des de la qual s'origina l'hiperbòlica, la introducció d'altres qüestions més aviat ho dificulta; perquè els Elements introdueixen nous problemes en la ~~seva~~ mesura que són la resultant (1) d'una tradició grega matemàtica: al costat dels llibres numèrics, el mètode geomètric i la teoria de les proporcions hi tenen un paper essencial; (2) d'un univers grec: els Elements no descabdellen tots els supòsits dels temes que estudien, no són un tractat epistemològic i ontològic, malgrat que implícitament n'hi ha rastres en els principis, en el peculiar ús geomètric davant del numèric, o en el tarannà mateix de les demostracions i de les proves de problemes i teoremes.

Llavors sembla indubtable de primer que cal respectar l'especificitat dels teoremes i dels problemes dels Elements; la història de la ciència s'interessa més aviat per la idiosincràcia de la manera matemàtica de treballar i/o per la connexió entre les realitzacions d'una obra o d'un poble amb el marc intel.lectual corresponent, a no ser que vulgui exposar-se a tota mena d'anacronismes; es tracta de contextualitzar un treball, de fer una aproximació històrica en l'accepció de penetrar, per una certa simpatia, en l'estil particularitzat d'una època, d'un temps, d'una cultura, mentre entenem que els fets històrics són globals en el sentit que hom s'apropa a una realització per allò que aquell poble entenia què hi feia. és clar que la contextualització pot ser més accentuada o menys: hom pot anotar les aportacions de les diferents obres o dels diversos pobles, fins i tot transcriure més o menys fidelment demostracions geomètiques a proves algèbriques, etc., sense que unes aproximacions llevin les altres malgrat que la sensibilitat històrico-contextualitzadora no sigui ben bé la mateixa, varietat d'aproximacions que segurament té algun correlat en tots els altres àmbits històrics.

Però el nostre interès per l'obra d'Euclides no és sols històric ni és fonamentalment històric: més aviat pressuposem aquest estudi perquè s'hi recull una tradició i s'escrigué dins d'unes coordenades; alhora la lectura contextualitzadora, el respecte per la idiosincràcia i fins i tot el reconeixement que, en un llenguatge divers, s'hi troben prou resultants actuals, no lleva el fet rellevant que els <u>Elements</u> són una obra matemàtica madura, en un cert sentit (si no es prem molt el mot) <u>acabada</u> i en prou de les seves proposicions sens dubte magistral. El nostre propòsit essent el de caracteritzar la nostra geometria euclidiana (què estudia? què entenem per punt? què és una demostració? Etc.) sembla que cal algun anacronisme si més no en la ~~mida~~ mesura que fem preguntes des d'aquí i ara i que les respostres són una funció dels propis interessos i necessitats; per això apareixen nous dubtes sobre la legitimitat d'aquest camí, que es podrien resumir de la següent manera: els <u>Elements</u>, diriem, sols es poden comprendre a partir de l'univers intel.lectual epistemològic dels grecs, respectant el seu estil geometritzant, i no hi ha res més a comprendre històricament; la contrarietat provindria doncs del salt des de la història de la ciència a l'historicisme en l'accepció de contextualitzar-hi tota activitat humana.

¿Creurem que un escrit matemàtic sols se l'entén a partir de l'epistemologia i l'ontologia que animen el seu creador? Si més no sembla un fet indubtable des d'un punt de mira <u>estrictament</u> històric, malgrat que el <u>sols</u> inaugura un ordre de qüestions que no són pas històriques i que cal sotmetre a crítica: perquè si els <u>Elements</u> (per exemple) depenen del filoplatonisme d'Euclides, el rebuig del platonisme implicaria el rebuig de tota l'obra, talment com hom no acceptaria el món ideal: tanmateix l'experiència ensenya que un hom pot acceptar tots els enunciats de les proposicions dels <u>Elements</u>, fins i tot seguint el mètode geomètric que s'hi exemplifica, sense ser platònic. Ben mirat es tracta de quelcom que val per als <u>Elements</u> i val per a una qualsevol obra matemàtica de tots els temps, inclosos els nostres: un hom no rebutja pas el discurs <u>matemàtic</u> de Hilbert o de Brouwer pel fet de no ser formalista o intuïcionista, etc., i més aviat la transmissió de coneixements pressuposa un cert «filtratge» de pressupòsits i l'aprenentatge de resultants, altrament tots els discursos matemàtics (o alguns, tant se val ara) serien compartiments estancs.

Pel cap baix la transmissió i la comunicació d'un discurs matemàtic sembla prou factible: versemblantment aprendríem el càlcul numèric a tall d'una mena de conducta, perquè es tracta aquí d'un cert domini ~~formal~~ lingüístic o comportamental, que se suposa aconseguit en algun grau molt abans de l'existència de qualsevol document escrit de les antigues cultures; el cas de la geometria és distint i la seva comunicabilitat prové possiblement de la cosa mateixa que estudia. És clar que no existeix una aritmètica «pura» o una geometria «pura» en l'accepció de comunicar-nos exclusivament allò que acceptem els uns dels altres: una tal cosa no val ni per als grecs ni per a nosaltres, i no existeixen puritats en l'accepció que les disciplines són discursos dels homes, que les exposen en llibres que reflecteixen més o menys els seu univers. Tanmateix això és un fenomen universal de la comunicació, i l'experiència indica que no tot i qualsevol fragment d'un discurs d'un home ha de ser acceptat, sense que això n'impliqui el rebuig global. Les disciplines matemàtiques doncs existeixen sols amb pressupòsits, siguin del qui les exposa, siguin del qui les acull. Però tot això són obvietats.

Endemés no es tracta tampoc de ser simplistes: que una obra cristal.litzi d'una manera o d'una altra depèn també d'allò que està tractant: les exposicions logicistes de la teoria numèrica en són un cas patent (les concepcions gregues del nombre podrien estar en el rerafons dels llibres aritmètics dels <u>Elements</u>, etc.), però el treball d'una racionalitat no està sols a rebutjar o matisar una valoració o una explicació epistemològica o ontològica, sinó també a comprendre-la en l'accepció d'indicar-ne els termes dels quals està composta alhora que ha d'entendre la realització aritmètica (en aquest cas) que animava: les <u>Grundgesetze der Arithmetik</u> no són un no-res, sinó un discurs, malgrat que el seu sentit no és el que volia que tingués Frege; però això també és vàlid per a les matemàtiques pitagòriques o per als llibres numèrics dels <u>Elements</u> on d'una banda caldria distingir entre la realització matemàtica (condicionada de cap a cap -- si voleu -- per l'explicació i la valoració del nombre) i la mateixa valoració i explicació explícita de la natura del nombre; d'altra banda caldria discutir <u>per separat</u> com fou possible que estimessin així i així el nombre i el fet que les seves realitzacions matemàtiques estan allí tal qual, que per tant han de merèixer una conformitat o un rebuig i que en qualsevol cas una racionalitat ha de mostar els motius per a estar-hi d'acord o per a diferir-hi.

Sens dubte reiterem obvietats en la ~~mida~~ mesura que es tracta de bell nou d'un fenomen universal que val per a qualsevol escrit o per a qualsevol discurs sigui quina sigui l'època, però la remarca era necessària perquè nosaltres pressuposem l'estudi històric dels Elements i ens interessen més aviat com una obra matemàtica exemplar. En conjunt no ens pertoca ara i aquí el repàs de la concepció grega del nombre o de les figures geomètriques, no fem història, sinó un assaig per a descabdellar la racionalitat de l'aritmètica i de la geometria i per això entrem en l'obra d'Euclides.

], que no tractarem aquí)

No sembla doncs que hi hagi dificultats greus a l'hora de l'estudi de les proposicions dels Elements, siguin aritmètiques o geomètriques, a les quals aquestes paraules van especialment referides: quan ~~salvem~~ salvéssim els esculls d'alguna proposició geomètrica (estem pensant per exemple en ~~l'ús de~~ la teoria de les proporcions) no intentaríem una «traducció» del mètode geomètric, sinó racionalitzar-lo en el sentit d'introduir-hi un fonament lògic talment com ho hauríem de fer per a uns tals usos geomètrics contemporanis, com hem de donar alguna raó dels càlculs numèrics d'avui dia: perquè l'aproximació crítica d'alguns punts de la geometria antiga (i potser de l'actual) revela que no n'hi ha una inspecció lògica directa, motiu pel qual la racionalitat n'ha de cercar algun complement lògic i ha d'explicar el pas de la presència dels elements que en fan una complitud a la conducta on són absents, a semblança (salvant prou les distàncies) d'allò que ocorre en els nombres. No podríem renunciar a la comesa sense renunciar a donar raó d'una disciplina, i les proposicions dels Elements entren per drets propis no sols en la història de les matemàtiques, sinó també en el seu cos.

L'afer és prou més significatiu del que podria semblar a primera vista: la rellevància d'una crítica lògica de l'obra d'Euclides -- que valdria ja per si mateixa -- s'accentua quan ens adonem que una certa valoració contemporània d'un escrit axiomalitzat, de l'esmerç de la mateixa reducció a l'absurd, de l'origen dels irracionals, de la teoria de les proporcions o fins i tot dels lligams entre aritmètica i geometria, no pot gaudir d'una maduresa crítica sense tenir en compte que ja són temes tractats i (en part) resolts pels Elements (i el món grec), de manera que és posible que, així com no hi ha una racionalització (dins dels límits d'allò que podem fer) de l'aritmètica des dels tractats moderns o antics, perquè ja hi està constituïda i apresa com a disciplina, així és possible que prou de les qüestions contemporànies siguin ja versions distintes (si voleu de cap a cap distintes) de les gregues i alhora que tant les unes com les altres, com a geometries constituïdes (i apreses) ens desorienten en més d'un punt en les connexions entre aritmètica i geometria o en la valoració dels irracionals, mentre que l'ús de la reducció a l'absurd, la teoria de la proporcionalitat o la demostració des de principis són temes contemporanis perquè són temes grecs, simplement. Si més no (i en un ordre distint d'afers) cal reconèixer que difícilment no som deutors dels grecs en qüestions tan rellevants com el principi de no contradicció, l'estimació de les inferències generalitzadores o fins i tot els principis genèrics del tall de «coses iguals a una tercera són iguals entre si» i d'altres.

El lector va observant que pressuposem un cert coneixement de la història de la matemàtica (i del pensament) però que aquí estem interessats més aviat en exercir críticament una racionalitat que ha de donar raó de qualsevol matemàtica: si hagués estat indiferent per a aquests propòsits el fet d'agafar una altra obra més moderna i que presentés (sense noves complicacions) la geometria euclidiana, els motius per a escollir els Elements són si més no de pes. Fins i tot ens permetrem la crítica de les definicions, de les nocions comunes i dels postulats, no pas perquè desconeguem que en qualsevol escrit matemàtic les introduccions (i uns tals principis en fan el paper) siguin el lloc preferent on abocar-hi la pròpia epistemologia i ontologia, sinó pel fet que prou de les defincions de punt, de línia, de superfície, etc., que s'han fet al llarg de la història haurien de ser comentades en termes semblants a les d'Euclides, a banda del fet que moltes de les seves definicions semblen insuperables; endemés no caldrà que ponderem la importància del cinquè postulat o la de la primera noció comuna quan ha estat defensada fins i tot avui dia com un principi a priori, etc. La nostra discussió crítica dels principis esdevé en poques paraules aquella que ens alertarà precisament del tema de la geometria (de tots els temps) i de l'abast lògic que poden significar les nostres paraules.

§ 52. Els principis dels «Elements».

El llibre I dels Elements conté un nombre considerable de proposicions ordenades, les unes basant-se en les altres, de tal manera que s'estudia primer allò que esdevindrà necessari més tard; d'altra banda la seva capçalera incorpora una colla de definicions, de postulats i de nocions comunes, que Procle anomena conjuntament 'principis', i que fan:

«DEFINICIONS:

1. Un punt és allò que no té parts.
2. Una línia és una llargada sense amplada.
3. Els extrems d'una línia són punts.
4. Una línia recta és la que uniformement roman amb els seus punts sobre ella mateixa.
5. Una superfície és allò que té sols llargada i amplada.
6. Els extrems d'una superfície són línies.
7. Una superfície plana és la que uniformement roman amb les seves línies rectes sobre ella mateixa.
8. Un angle pla és la inclinació d'una de dues línies en un pla sobre l'altra, que es troben l'una a l'altra i que no estan en línia recta.
9. I quan les línies que contenen l'angle són rectes, l'angle s'anomena rectilini.

10. Quan una línia recta dreçada sobre una línia recta fa els angles adjacents iguals l'un a l'altre, cadascun dels angles iguals és recte, i la línia recta dreçada sobre l'altra s'anomena una perpendicular d'aquella sobre la qual es dreça.

11. Un angle obtús és un angle més gran que l'angle recte.

12. Un angle agut és un angle més petit que l'angle recte.

13. Un límit és allò que és l'extrem de quelcom.

14. Una figura és allò que està contingut per algun límit o límits.

15. Un cercle és una figura plana continguda per una tal línia, que totes les línies rectes que hi van a parar, des d'un punt d'entre els que estan dins de la figura, són iguals les unes a les altres.

16. I el punt s'anomena el centre del cercle.

17. Un diàmetre del cercle és qualsevol línia recta traçada a través del centre i que acaba en la circumferència del cercle per ambdues direccions, i una tal línia recta biseca també el cercle.

18. Un semicercle és la figura continguda pel diàmetre i per la circumferència que talla. I el centre del semicercle és el mateix que el del cercle.

19. Les figures rectilínies són les que estan contingudes per línies rectes, essent les figures trilaterals les contingudes per tres línies rectes, les quadrilàteres per quatre, i les multilaterals per més de quatre.

20. Entre les figures trilaterals, un triangle equilàter és la que té els seus tres costats iguals; un triangle isòsceles la que té sols dos dels costats iguals; i un triangle escalè la que té els tres costats desiguals.

21. D'altra banda, entre les figures trilaterals, un triangle rectangle és la que té un angle recte; un obtusangle la que té un angle obtús, i un acutangle la que té els tres angles aguts.

22. Entre les figures quadrilàteres, un quadrat és la que és alhora equilàtera i rectangle; un oblong la que és rectangle però no equilàtera; un rombe la que és equilàtera però no rectangle; i un romboide la que té costats i angles oposats iguals però ni és equilàtera ni rectangle. I els quadrilàters restants s'anomenen trapezis.

23. Línies rectes paral.leles són aquelles línies rectes que, estant en el mateix pla i essent perllongades indefinidament en ambdues direccions, no es troben en cap direcció.

POSTULATS:

Postuli's el següent:

1. Dibuixar una línia recta des d'un punt qualsevol a un altre punt qualsevol.

2. Perllongar contínuament una línia finita en una línia recta.

3. Traçar un cercle amb un qualsevol centre i distància.

4. Que tots els angles rectes són iguals els uns als altres.

5. Que, una línia recta que talla dues línies rectes fent que els angles interiors del mateix costat sumin menys de dos rectes,

si les perllonguem indefinidament llavors es troben pel costat en què els angles sumen menys de dos rectes.

NOCIONS COMUNES:

1. Coses iguals a una mateixa cosa són també iguals entre si.
2. Si s'afegeix iguals a iguals, els tots són iguals.
3. Si se sostreu iguals d'iguals, les resultants són iguals.
(7)4. Les coses que coincideixen són iguals entre si.
(8)5. El tot és més gran que la part.»

Volent doncs apropar-nos a la geometria euclidiana, val la pena que comencem per considerar una mica el possible mòbil de l'autor d'aquesta classificació a l'hora de distingir definicions, postulats i nocions comunes. Però lamentablement l'afer no és gens senzill.

D'una banda una gran part dels historiadors han accentuat el paper rellevant d'Aristòtil en l'origen de la sistematització matemàtica i han tractat d'apropar la classificació dels Elements a l'aristotèlica[1], que es podria resumir de la següent manera: tota ciència demostrativa, diu Aristòtil, es descabdella des d'uns principis indemostrables (primers principis), els quals són en part comuns a totes les ciències, en part peculiars de cada ciència particular; els primers són els axiomes («si se sostreu iguals d'iguals, les resultants són iguals», per exemple) -- als segons pertany el gènere (o subjecte que es tracta), del qual cal assumir l'existència (la magnitud en el cas de la geometria, la unitat en el de l'aritmètica, etc.); a més, afegeix, hem d'assumir les definicions de manifestacions o atributs del gènere, p.e. de línies rectes, de triangles, en la geometria. Però Aristòtil defensa, en conjunt, que les definicions com a tals són afers de la significació (ens diuen què és una cosa, no que sigui, que existeixi), tot i que de seguida admet que, en geometria, cal assumir, a més a més del gènere i de les definicions, l'existència d'unes poques coses primàries, que són definides, i que són l'existència de punts i de línies (el cercle es considera també tancat per una línia): totes les altres figures -- dreçades amb els punts i les línies (triangles, quadrats, tangents, i les seves propietats, p.e. la incommensurabilitat, etc.) -- han de tenir una prova, que es fa per construcció i demostració. D'altra banda, continua, en aritmètica assumim l'existència de la unitat, però, pel que fa a la resta, sols n'assumim les definicions (p.e. de parell, de senar, de quadrat, etc.), tot i que l'existència cal que

[1] És el cas de l'eminent historiador de la ciència T.L.Heath, The thirteen books of Euclid's Elements I, pàgs.114-151. El resum d'Aristòtil s'extreu d'Anal.post.I,10.

sigui provada[2]. Ha distingit doncs els axiomes i les definicions, tots els quals són principis indemostrables; ara toca distingir el *postulat* i la *hipòtesi*: tant l'un com l'altra, diu, s'assumeixen sense haver-los provat, per més que són subjectes de prova: però la segona s'admet de grat, el primer amb indiferència o a contracor; val la pena afegir que Aristòtil usa també el terme «postulat» simplement per a quelcom que s'assumeix sense prova tot i ser quelcom a provar, i en un altre lloc se'ns recorda que «en igualtat de circumstàncies és millor la prova que prové d'un nombre menor de postulats o hipòtesis o proposicions» (cf.*Anal*.*post*.I,25).

En Aristòtil doncs la definició no diu res sobre l'existència o no de la cosa definida, que ha de ser *provada* o, en algun cas, *assumida*; en geometria cal precisament assumir l'existència de punts i de línies, i l'existència de la recta ha de ser provada: d'acord amb això, podríem argumentar, trobem en els *Elements* que els tres primers postulats defensen la possibilitat de construir línies rectes i cercles (aquests entesos com a tancats per línies), i les altres definicions rebrien més tard la confirmació que les coses definides existeixen: *Eucl*.I,1 proposa de construir un triangle equilàter (Def.20), que, una vegada acabat, es prova conforme amb la definició; *Eucl*.I,11 fa el mateix amb la Def.10, *Eucl*.I,46 amb la Def.22, *Eucl*.I,27-29 amb la Def.23: en tots els casos hi ha, sembla, un pas de les coses definides, però de les quals no se n'assumeix l'existència, a la prova de llur existència a través de la *construcció*, els primers principis de la qual haurien estat postulats, i les ~~resta de~~ definicions que no cal provar serien assumides sense més comentari. Respecte dels postulats no caldria concebre'ls d'una manera absolutament dispar d'Aristòtil: no podríem admetre que es referissin a quelcom fet o a fer (en oposició a quelcom conegut dels axiomes), perquè llavors el quart postulat no ho seria, i segurament tampoc no ho fóra el cinquè; d'altra banda la confusió d'axiomes i de postulats faria difícil d'entendre que Euclides els separés; versemblantment doncs Euclides valoraria els postulats com una sèrie de coses que cal assumir sense evidència pròpia: certes simples construccions, el fet de dibuixar una línia, d'allargar-la i de dibuixar un cercle; i, amb les construccions, l'existència de coses com línies i cercles; a més a més calia acceptar també algun postulat que servís

---

[2]Sens dubte hi ha aquí un cert paral.lelisme amb el comentari de Poincaré quan diu precisament parlant dels primers principis que «*il est rare qu'en mathématiques on donne une définition sans la faire suivre par la démonstration de l'existence de l'objet défini, et quand on s'en dispense, c'est généralment que le lecteur y peut aisément supléer. Il ne faut pas oublier que le mot existence n'a pas le même sens quand il s'agit d'un être mathématique et quand il est question d'un objet matériel. Un être mathématique existe, pourvu que sa définition n'implique pas contradiction, soit en elle-même, soit avec les propositions antérieurement admises*», *La science et l'hypothèse*, pàg.59.

per a bastir la teoria de les paral.leles, així com queicom que és la seva condició, la igualtat de tots els angles rectes i que hauria estimat també necessari d'incloure entre els postulats. En acabant les nocions comunes d'Euclides remetrien fàcilment als axiomes o «opinions comunes», com sigui que fins i tot recullen algun dels exemples d'Aristòtil («si se sostreu iguals d'iguals, les resultants són iguals»), i són principis que tenen una validesa més enllà de la geometria.

Cal reconèixer tanmateix que el fet d'apropar les distincions euclidianes a les aristotèliques manté com a mínim dues dificultats: Aristòtil demana que es provi l'existència del par i del senar, i els Elements sols els defineixen (Eucl.VII.Defs.6 i 7), però potser caldria contraargumentar que el llibre VII comença directament a provar que hi ha nombres primers i passa tot seguit a l'estudi dels divisors. La segona és de més pes en la ~~mida~~ mesura que compromet la interpretació del terme «postulat» en Aristòtil (que l'usa també amb un tal abast significatiu que engloba la hipòtesi). Pel cap baix l'aproximació de les distincions aristotèliques i de les euclidianes té el mèrit que no ens obliga a reconstruccions més o menys versemblants dels orígens de la classificació dels Elements i, en especial, del dels postulats.

És clar que d'altres historiadors han suggerit una interpretació diversa (si no oposada) dels principis dels Elements: així el professor Àrpád Szabó[35] ha apuntat els orígens eleàtics i platònics del mot «hypothesis» (tant en Plató com en Procle el mot té dues accepcions: la de fonaments de la matemàtica en general i la que sols fa referència a les definicions) i, afegeix, «això sembla indicar que els principis fonamentals s'indentificaven en un temps determinat amb les definicions. A més a més és obvi que les veritables hypotheseis primeres sobre les quals cal que estiguin d'acord els partidaris en un debat dialèctic prenen la forma de definicions. Hom necessita establir que qualsevol cosa que s'està discutint existeix i que sempre pot distingir-ho d'allò que no és; no pot ser el fet mateix i el seu oposat al mateix temps»(pàgs.255-256).

D'altra banda, mentre Szabó admet que pràcticament tothom està d'acord en el fet que els postulats serveixen per a garantir l'existència de certes coses bàsiques imprescindibles per a la construcció de les altres figures, això és, l'existència de línies rectes, de cercles i de punts d'intersecció (el famós cinquè postulat assumeix l'existència d'un punt en el qual es troben dues línies convergents), discuteix en concret l'origen dels tres primers postulats, que creu, a partir d'una suggerència de Heath, que cal atribuir a Enòpides: «els postulats 1-3 són equivalents en

---

[35]Tota l'argumentació d'aquest investigador es desbadella en la tercera part de la seva obra The beginnings of greek mathematics, pàgs.185-331.

teoria a permetre l'ús de regle i compàs. Un regle fa que es pugui dibuixar una línia recta des d'un punt qualsevol a un altre punt qualsevol, i que es pugui 'perllongar contínuament una línia recta en una línia recta'. De manera semblant és fàcil de 'traçar un cercle amb un qualsevol centre i distància' tot usant un parell de compassos. Dir per tant que Enòpides resolgué el problema 'per mitjà de regle i compassos' precisament és dir que el resolgué tot fent un ús conscient dels tres primers postulats d'Euclides. En efecte ell pogué ser fins i tot l'autor d'aquests postulats, si efectivament fou la primera persona que oferí construccions teòriques per a les proposicions I.12 i I.13. Aquesta és l'única interpretació raonable de la conjectura de Heath que "la importància d'Enòpides rau en el millorament del mètode des del punt de vista de la teoria"»(pàgs.275-276). Alhora, mentre suggereix de bell nou l'origen dialèctic del mot «postulat», conclou que «com una qüestió de fet sabem que en els anys que precedeixen els temps d'Enòpides, l'autor putatiu dels postulats 1-3, aparegué un grup molt influent d'homes que aconseguiren brillantment de mostrar que qualsevol classe de moviment era contradictori i per tant inconcebible. M'estic referint, és clar, als eleàtics i, en particular, a Zenó, que donà la formulació més incisiva de les idees de Parmènides. Si pensem en tot això, és fàcil d'entendre per què calia establir els tres primers postulats d'Euclides. L'únic mitjà per a fer possible teòricament les construccions geomètriques és el d'admetre si més no aquelles classes de moviments que són indispensables per la producció de les formes geomètriques més simple (o sigui línies rectes, cercles, i llurs punts d'intersecció). De fet els postulats 1-3 garanteixen l'existència de certes formes geomètriques bàsiques; asseguren que és possible dur a terme les construccions més simples o, en d'altres mots, fan requesta d'aquelles classes de moviment que són necessàris per a aquest objectiu. Són efectivament peticions (αἰτήματα) i no acords (ὁμολογήματα); perquè postulen moviment, i ningú que s'adherís consistentment a l'ensenyament eleàtic no hauria pogut acceptar afirmacions d'aquest tipus com a base per a posteriors discussions. En això rau la diferència entre αἴτημα d'una banda, i ὑπόθεσις i ὁμολόγημα d'una altra»(pàgs.278-279).

Finalment les nocions comunes dels Elements també remetrien a necessitats dialèctiques: «els axiomes per a la igualtat que apareixen en els Elements són assercions empíriques basades en l'experiència amb conjunts finits. Sols l'evidència sensorial garanteix llur validesa; no podien doncs ser acceptats pels eleàtics, que demanaven que tot el coneixement s'obtingués per mitjans merament intel.lectuals i sense recórrer als sentits. Aquests principis s'anomenaren originàriament peticions (ἀξιώματα) perquè l'altre grup en el debat dialèctic tenia reserves d'acceptar-los com a base per a una investigació posterior o, en altres paraules, perquè sols es podia demanar llur acceptació (els axiomes d'Euclides no eren menys incompatibles amb l'ensenyàment eleàtic que aquests postulats). Després de Plató, tanmateix, no es va entendre per massa temps molt bé allò que era l'essència de la dialèctica eleàtica; d'aquí que el vell terme ἀξίωμα va adquirir un nou significat. Havent-se usat sempre per a referir-se a un grup de principis que, des del punt de vista del sentit comú, eren evidentment vàlids, passà ara a denotar aquelles afirmacions la veritat de les quals "s'acceptava com un fet obvi". (Fins i tot es feren esforços per a justificar la nova significació sobre fonaments etimològics). El rebuig d'Aristòtil de les paradoxes de Zenó com a mers sofismes va ajudar indubtablement a fer possible aquest canvi. Com una qüestió de fet, sembla que fou Aristòtil l'autor antic que proposà la idea, seguida per tot el món, que les matemàtiques han de basar-se en "fonaments evidentment vertaders, indiscutibles i simples"» (pàg.301). Euclides hauria conservat doncs una distinció tradicional entre nocions comunes i postulats (en l'origen els primers haurien establert fets empírics de la igualtat, els segons haurien objectat a favor de la moció).

El treball de Szabó apunta doncs l'origen dels principis de la geometria: (1) el primer pas fou la necessitat de revisar el punt de vista eleàtic de l'espai, que el negava: l'espai, com el món perceptible, era contradictori; (2) la geometria hauria estat primer un cos de coneixements empírics, tot i que amb el temps l'espai seria considerat com quelcom «ideal»: d'aquí l'esforç d'excloure el concepte de moció o les propietats visibles en les definicions del llibre I dels Elements; (3) però la formulació idealitzada de la geometria topava inevitablement amb les troballes dels eleàtics: que l'espai era divisible infinitament -- no hi havia magnituds mínimes (no hi havia res en geometria comparable a la unitat en aritmètica): les definicions 1 i 2 s'han d'entendre com l'intent d'evitar un tal escull --, que el concepte de moció era inconsistent, i que cap coneixement vertader es podia basar en la percepció. Els fonaments de la geometria foren la resposta a aquestes dificultats: «[els grecs] degueren sentir la necessitat d'establir certs fets empírics que eren indispensables per a la construcció d'una ciència de l'espai, malgrat fins i tot que aquests fets no satisfeien l'exigència eleàtica que el coneixement s'adquirís per mitjans merament intel.lectuals. Llur primer treball fou el de posar en clar que les formes de la geometria (línies, punts d'intersecció, angles, figures, etc.) no eren de cap manera les mateixes que les percebudes pels sentits.; les formes geomètriques vertaderes eren entitats ideals (com els nombres), les rèpliques visibles de les quals servien per a representar-les. Les definicions tendiren a eliminar de la geometria tots els trets sensibles que fossin possibles i els axiomes i els postulats debatuts abans tingueren la finalitat de fer merament abstractes els fonaments d'aquesta ciència» (pàg.315).

En acabant caldria revisar, afegeix, que l'única prova d'existència fos per construcció: Eucl.VII,31 i IX,20 són proves d'existència i no ho fan per construcció, alhora que la idea que les construccions geomètriques puguin servir de prova d'existència és aliena a Plató (antics i moderns han tingut Euclides com un platònic). Es pot provar doncs de refer la situació a partir dels punts de vista dels eleàtics i de Plató: els eleàtics no dubtaren mai de l'existència de l'ésser i de l'u, i en donaren més aviat proves indirectes; per consegüent hauria calgut establir l'existència del nombre (Eucl.VII.Def.2), sense provar-la, i s'hauria fet ús de la prova indirecta eleàtica en aritmètica (n'hi ha forces en els llibres numèrics dels Elements). El problema era distint en geometria: perquè Parmènides negà l'espai, i Plató el descriu com el món del noeton; l'existència de l'espai doncs despertava dubtes (molts més que la de l'u i la del nombre): l'existència geomètrica podria semblar més una qüestió de percepció que de reflexió; això explicaria que algunes definicions d'Euclides fossin més aviat especulatives (per exemple Eucl.I.Def.1 i 2), mentre que la dels angles i de les figures descrivissin més aviat aparences d'aquestes coses: i per aquesta raó l'existència geomètrica havia de ser establerta per mètodes pràctics i empírics, això és, per construcció[*].

§ 53. El punt, la línia i l'espai

Les notes precedents mostren l'extraordinària dificultat d'entendre l'abast exacte de les definicions, dels postulats i de les nocions comunes de l'obra d'Euclides. Però cal afegir també que no podem renunciar a algunes de les dades que s'hi troben perquè, potser val la pena de remarcar-ho, no sembla que tinguem cap caracterització de la geometria: la mateixa magnitud, quan no és un registre, es diu potser d'una cosa en tant que té més o menys, i un triangle no seria una magnitud en tant que síntesi. D'alguna

---

[*]Szabó afegeix: «una qüestió més que aquí cal si més no esmentar és si els tres primers postulats tingueren en un temps determinat la classe d'importància especial que sovint es defensa. Becker ha escrit: "sembla que en l'escola de Plató les construccions es duien a terme, quan era possible, sols amb regle i compàs, mentre que prèviament també havia estat permès l'ús de la inclinació (νεῦσις)". Podríem preguntar-nos si foren de fet els platònics els que volgueren limitar-se als tres primers postulats i, si ho foren, com cal prendre una tal restricció respecte l'ensenyament de Plató. Certament la cita de dalt fa l'efecte que l'ús de sols regle i compassos fou una innovació feta pels platònics. Tanmateix sembla improbable que les coses anessin així. Sobre la base del propi estudi de Becker es podria mostrar que probablement els tres primers postulats d'Euclides daten d'abans del segle V a.C. Pot ser doncs raonablement defensat que l'observança de la restricció esmentada en els temps de Plató era ja un costum antic, al qual els seus seguidors sols s'haurien adherit per tradició. Tanmateix no vull suggerir que es pugui donar una solució definitiva d'aquest problema. Ho esmento sols com un exemple de la classe de qüestions fonamentals de la història de les matemàtiques que romanen encara per a investigar»(pàg.322).

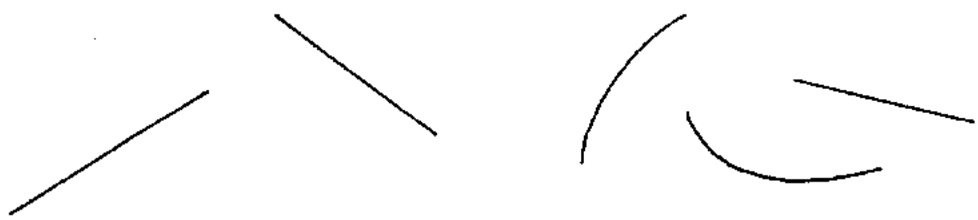
manera no hauríem de renunciar a l'estudi de coses com punts, com línies, com superfícies, etc., el cinquè postulat és prou essencial per a la consideració de les geometries hiperbòliques i la importància de les nocions comunes està també fora de qüestió: caldrà per tant una aproximació respectuosa del text que ens sigui útil alhora per a la caracterització de la geometria. Altrament els Elements serien una mera curiositat històrica sense valor per als problemes d'avui.

En efecte és difícil de no admetre que totes les definicions de punt, de línia, etc., no siguin deutores de les d'Euclides o que no la suposin d'una manera directa o indirecta. Entrant en la de punt cal reconèixer la seva genialitat: si tenia com a rerafons el fet d'evitar la divisió ad libitum d'una cosa contínua, la radicalitat de la definició deixa sense recurs al posible oponent; d'altra banda és possible que pressuposi un transfons més o menys platònic. Des del nostre punt de vista, tanmateix, hauríem de tenir cura que els usos contemporanis d'una tal definició (o els seus substituts) tenen sols una validesa funcional: no sembla pas que cap dels nostres contemporanis pugui creure que valgui més enllà d'un (savi) registre; car anomenem 'part', sembla, un dels termes que es relacionen en una anàlisi: «sense parts» doncs refusaria el nom 'part'; essent difícil que hi hagi un individu que no pugui analitzar-se, no hi hauria manera de tenir quelcom que pogués tenir el nom 'sense parts': per això el punt tindria una definició lingüística; en la ~~mida~~ mesura que la convertim en no formal el rebuig de la definició ens convida a reiterar l'anàlisi de parts. Es tracta doncs d'un registre que va bé, que és útil, i per això l'admetem, mentre que no hi ha aquí cap altre pensament que no sigui el lingüístic. Això vol dir que a efectes no lingüístics un punt és quelcom suficientment petit ~~com per considerar-ne~~ que permeti que el considerem com a sense parts; en d'altres paraules: el punt (no lingüístic) tindria sempre algun contingut lògic mentre que el punt lingüístic seria un registre.

La definició euclidiana de línia (Eucl.I.Def.2) pot descansar també en els mateixos supòsits que la del punt, i totes les definicions alternatives en són així mateix variants (com sempre estem pressuposant definicions que no siguin numèriques). Però cal reconèixer que una tal definició de línia no deixa d'introduir un cert equívoc (tot i que és també prou còmoda); d'una banda és un registre prou útil: la seva conversió no formal t'obliga a reiterar l'anàlisi en amplada i a efectes pràctics es tracta en qualsevol cas de quelcom amb algun contingut lògic (quelcom molt fi), mentre conservem el pensament lingüístic (el registre). Fins aquí sense problemes: però en afirmar que hi determinem una cosa en llargada, o en una dimensió, sembla que no s'hi admeti allò que no és recte (una línia corba difícilment es manté en una mateixa dimensió), i no podem abusar d'una lectura sense fer un impossible (la línia és una cosa); per això és pràcticament impossible d'acceptar, sembla, que sigui «una llargada».

Les dificultats es resoldrien potser si hom tingués les línies com a traços continus (si de manera indefinida, el mot lingüístic ens obligaria a anar reiterant la determinació quan abandonéssim el pensament lingüístic), en la construcció de les quals tenim presents una sèrie de regles o de registres, entre els quals es troba per exemple que cada tros del continu «no té (no ha de tenir) amplada», quelcom que no pot passar de ser un registre, que se subsumeix al final amb el registre que el tros considerat sigui un punt «sense parts», però que ens fa prendre prou precaucions a l'hora d'estudiar els nostres dibuixos i les nostres maquetes. Alhora nosaltres també explicàvem (però no sempre) l'ús dels noms per la pròpia dada lògica i la seva anàlisi i en la mesura que comparem i estructurem les diferents coses; l'afer llavors -- pres no lingüísticament -- segurament remetria a una anàlisi (la finor) i a les coses fines, i a les coses contínues (sense haver-hi mai un començament lògic genuí), que revestim lingüísticament amb un «sense amplada», que accentua les precaucions a prendre en els nostres estudis. Pensada des de les nostres definicions lingüístiques de punt i de línia, la geometria esdevindria doncs una disciplina no natural (el punt i la línia tindrien un contingut «ideal»): tanmateix notem que llur caracterització lingüística ens informa sols d'una negació lingüística, això és, des del punt de mira d'aquells continguts no hi hauria de fet geometria; per això aquesta disciplina es descabdella efectivament amb els nostres dibuixos i maquetes mentre hi ha l'afecció d'aquella caracterització lingüística.

Paral.lelament 'línia (o segment) recta' i 'corba' remetrien també a aquesta doble possibilitat lingüística i no lingüística: d'una banda semblen noms l'ús dels quals enviaria a la dada lògica



(i la seva anàlisi) i a la comparació (i a l'estructura). D'altra banda es tractaria de «línies», això és de traços continus, «il.limitats», cap tros dels quals «no tindria amplada», etc.: per tant l'ambivalència lingüística/no lingüística de la geometria es mantindrà en tota circumstància.

Notem que quan es té la recta per la distància més curta entre dos punts, si és cert que «nosaltres anomenem la distància d'alguna cosa la línia recta» (Aristòtil, De caelo I.4,271 a 13), llavors hi ha un problema d'usos de paraules: la distància sembla la recta que no comprèn els extrems que disten; però si 'distància' és el nom per a diferents trajectes, llavors 'la distància més curta' esdevé aquí simplement d'igual ús que 'recte entre dues coses'; i si les «coses» són punts «sense parts» llavors 'la distància més curta' (i si voleu 'la distància') és aquí d'igual ús que 'recte': hi ha un encreuament de significacions lingüístiques (distància, recte, etc.), de sinonímia d'usos ostensius i d'idealitzacions.

En qualsevol cas 'línia recta' i 'línia corba' semblen noms per a individus (i estructures) -- per tant per a quelcom positivament donat (sempre, és clar, que no considerem mers registres) -- tot recordant que ni 'recte' ni 'corb' se circumscriurien a les línies (als segments), però això no seria més que el fet que les coses rectes i les coses corbes són susceptibles de bastir les respectives comparacions i estructures[5].

Llegida doncs amb ulls moderns la definició euclidiana de línia sembla equívoca, perquè 'llargada' seria un nom per a la dimensió, i una línia corba mai no es desplegaria en una sola dimensió; a més l'ús del 'sense amplada' el considerarem una determinació merament lingüística que remet a reiterar les determinacions quan esdevé quelcom no merament lingüístic. La dimensió no sembla tenir res a veure en principi ni amb segments ni amb línies, sinó que les dimensions es determinen probablement en l'anàlisi de quelcom, que en conjunt no és solament visual; però hom no usa, sembla, el nom de 'dimensió' més que per raó de les diferències que s'hi troben, on, literalment, hi hauria tantes dimensions com es volgués, tantes com va permetent la diferència: sabem per exemple que l'espai que hi ha entre la paret i el meu cos és fonamentalment tàctil (i motor) i que la mà pot anar determinant-lo diferentment -- i l'espai visual de la taula permet mil i una diferències; en conjunt l'espai és el camp de la diferència. En aquest punt s'admet ja que recte és una dada lògica: però allò que és recte no cal que sigui sols visual, com sigui que reconec també tàctilment (o motorament) allò que és recte; sens dubte qualsevol reconeixement recte individua una dimensió, però qualsevol altre també ho fa, com els reconeixements que els creuen, etc. D'alguna manera individuem les dimensions en la rectitud, però n'hi ha moltes, alhora que el nom 'dimensió' no té simplement el mateix ús que el de 'rectitud', perquè es diu de les estructures de rectitud diferents en l'anàlisi de l'espai[6].

---

[5]Observi's que qualsevol definició geomètrica pot contenir, si es vol, els moviments del cos que hi duen, però no sembla pas que hom pugui estalviar-se l'individu a definir: el fet que l'eix de rotació d'un cos romangui invariable (que coincideixi amb ell mateix) no ens liura una noció de recta per la rotació, sinó per si mateixa.

[6]Cal no perdre de vista que ens movem a nivell de l'espai quotidià i euclidià, i que és un tal domini d'aquest espai (de les seves relacions) -- i de la teoria numèrica -- el que permet d'altres passes lògiques que alhora remeten a noves concepcions de l'espai: per això així com hi ha alteracions semàntiques en l'ús

L'anàlisi de l'espai en llargada, amplada i gruix (per al rerafons de l'afer del sòlid, cf.Eucl.XI.Def.1) respon segurament més a motius d'utilitat del llenguatge i a la simplificació de l'anàlisi, que a la lògica de l'espai. No és pas que no s'hi donin, sinó que tres dimensions no semblen determinar l'espai, tot i que sigui cert que en l'anàlisi d'un espai hi ha com a mínim tres dimensions -- llavors l'espai quotidià i euclidià té com a mínim tres di- mensions: no hi ha aquí un espai que tingui com a mínim dues dimensions ni un espai que tingui com a mínim quatre o més dimensions.

---

del mot 'nombre' (nombre natural, real, racional, etc.), així n'hi ha en el d''espai', etc. Fet i fet és sols des de les reflexions sobre l'espai quotidià i euclidià que un cert àmbit de la filosofia pot fer entendre l'acceptació d'altres llenguatges abstractes, fins i tot quan considerem la geometria euclidiana com un cas particular d'aquests últims: com sempre es tracta d'un cas de domini de nivells bàsics i de la capacitat abstractora (i lingüística) de l'home.

Anem entenent doncs per què el segment o la línia no tindrien res a veure amb la llargada: perquè la dimensió determina en la rectitud i no determina pas quines (i com) han de ser les altres dimensions, fins i tot quan reprenem en una altra dimensió allò que la primera determinava, mentre que una línia no acompleix ni la rectitud ni la indeterminació d'una altra dimensió. Per tant les línies i els segments semblen determinacions <u>ad hoc</u>, que descobrim en les coses o que ens dibuixen en els nostres papers i que definim mitjançant registres que, en part, no poden superar el contingut lingüístic.

La definició de superfície (cf.<u>Eucl</u>.I.Def.5) la llegiríem d'acord amb el nostre fil conductor interpretatiu: si les superfícies tinguessin com a mínim dues dimensions, llavors totes, excepte les planes, no serien superfícies. En efecte és possible que les superfícies no tinguin res a veure amb el nombre de dimensions com a anàlisi de l'espai, sinó que 'superfície' sigui un altre nom per a certes coses. Recordem que el mot 'cosa' i el mot 'espai' són en una accepció d'ús intercanviable; però en algunes circumstàncies no, i.e. quan la cosa no és espacial; ara afegim que de vegades són també d'ús intercanviable 'cosa', 'espai', i 'superfície': nosaltres reconeixem l'espai en la mesura que hi ha diferència, per això la diferència visual, tàctil i motora (sobretot) entren en l'anàlisi de l'espai. Hi ha per tant <u>més cosa</u> quan hi ha <u>més diferència</u> o <u>una altra diferència</u>, que de vegades vol dir també <u>més dimensions</u>: en trencar la pedra toquem i veiem coses noves i quan enfonsem la mà al fang anem reconeixent l'experiència o diferenciem els punts tàctilo-motors extrems, etc. Usem doncs el nom 'superfície' i el nom 'interior', sense que calgui fixar la lògica i els noms: dues pedres trobades són superfícies al costat d'aquestes altres coses interiors d'aquestes altres dues pedres que acabem d'esberlar; dos forats a terra mostren l'interior de la superfície, que encara es reconeix a la resta del terreny, etc. Quan no <u>fixem</u> la lògica i els noms comprovem que 'superfície' i 'interior' són noms ingenus -- diguem-ho així -- per a experiències de cada dia; i l'expectativa que la cosa on no hi reconeixem ara interiors sigui més que la superfície no té d'altre fonament lògic natural: esdevé quelcom afectiu que, perquè hi és, remet (vagament) a l'aprenentatge o/i a la imaginació d'experiències passades. Per tant hi ha superfícies perquè hi ha forats, enfonsaments, coses trencades, etc.; forçant la racionalització, els diferents noms 'superfície', 'interior' responen a la circumstància que el forat, l'aspecte ocult, l'enfonsament, etc., es poden agrupar (si voleu imaginàriament) al costat de la superfície del terra, de la pedra tal i com la tinc, del fang tocat delicadament, etc., que fan llur agrupació, etc. En d'altres paraules, 'superfície' i 'interior' són noms per a coses: el segon per a dimensions de la cosa que la superfície no reconeix.

Les definicions més o menys euclidianes de superfície més aviat imiten lingüísticament les definicions de punt, de línia (i d'espai), i no serien escaients més que per a les superfícies planes, en l'accepció que el pla fóra llavors aquell individu que té moltes dimensions, encara que cal trobar-hi com a mínim dues dimensions diferents i no pot tenir com a mínim tres dimensions diferents. Potser val la pena afegir que la definició arquimediana del pla («de les supercífies que tenen els mateixos extrems, si aquests extrems estan en un pla, el pla és la més petita») no defineix pròpiamentç el pla, sinó que estableix una relació de superfícies.

Per tant no sembla que puguem acceptar fàcilment que una superfície sigui allò que sols té llargada i amplada; més aviat les superfícies són coses (si voleu: coses espacials) que oposem als seus interiors, a les quals afegim la comanda <u>lingüística</u> que siguin «~~una~~ pures superfícies» segons els supòsits de la línia i del punt, és a dir, que qualsevol línia que continguin no sols sigui en qualsevol tros «sense amplada», sinó també «sense gruix» (i.e.sense interior), que no poden passar de ser registres, que se subsumeixen al final amb el nou registre que el tros considerat sigui un punt «sense parts», i que si més no tenen una eficaç utilitat a l'hora de l'estudi dels nostres dibuixos i maquetes.

La concepció geomètrica de superfície doncs es mou també en una doble nivell: mentre considerem les superfícies en els nostres treballs tal i com ho podem fer de fet, les concebem lingüísticament d'acord amb els trets de les línies i dels punts que conté i que pensem així mateix de manera lingüística[7].

---

[7]Adverteixi's que el nom 'direcció' (en una de les seves accepcions) té en compte la reversibilitat de la diferència espacial (hi estan implicats sobretot el camp visual, tàctil i motor); d'aquí que l'ús del mot 'direcció' no se circumscriu pas a allò que individua la dimensió (una corba té direccions), etc.

§ 54. Apunts sobre alguns postulats.

Prou de les interpretacions que s'han fet dels tres primers postulats dels Elements estan relacionades amb la circumstància de garantir l'existència de línies i de cercles (això seria vàlid tant per a una lectura aristotelitzant com per una que ho contempla des de Plató i les dificultats d'acceptar-hi moviment); és clar que també es poden llegir com l'exigència d'usar sols regle i compàs.

Per això és potser millor enfocar la qüestió d'una manera que sigui útil per a la caracterització de la geometria, seguint el nostre fil conductor sobre les relacions entre punt, línia i espai: per exemple podríem remarcar, a propòsit del primer postulat, que la determinació d'una línia té un valor lògic prou vari del d'una construcció, i tant l'una com l'altra tenen també un valor separat del de la comanda. Però si el postulat anés dirigit a l'admissió que puguem dibuixar línies i línies rectes, els dibuixos no essent ni línies ni rectes, llavors el postulat seria la conseqüència de les estipulacions lingüístiques de les definicions dels Elements; o defensa potser que sols hi ha una recta que uneix dos punts, tractant-se aleshores d'una ordre ~~pràctica~~ prou entenedora: podem dibuixar més o menys bé -- diria -- però en qualsevol cas no admeteu més d'una línia recta entre dos punts; perquè si admeteu que un punt és una marca tan petita com us sigui possible¹, en el cas de poder fer-hi partir dues línies rectes cap al segon punt sembla que no l'hauríeu fet ~~tan petit~~ com exigeix el joc; per tant la comanda recolliria una doble certesa: que un punt ha de ser quelcom ~~més petit~~ en conformitat amb la concepció que en tenim, i que la recta és el camí més breu, i només n'hi ha un; no es tractaria d'una comanda que comprometés el tarannà de l'espai (a banda que l'espai i les dimensions no semblen tenir res a veure amb punts i línies), sinó d'un consell-ordre ~~per a dibuixar~~, etc.

¹ i fins i tot és quelcom sense parts

Passant al segon postulat podria creure's que demana un altre requisit també prou entenedor~~, i que afecta [illegible] a la manera de dibuixar~~: el camí recte és el més curt i qualsevol part fets s'hi encamina; alhora la línia recta no es perd en rodeigs: si la continuo he de fer-ho seguint el seu estil; si una segona línia recta té en comú, en el dibuix, un tros de l'anterior línia, el dibuix és massa dolent («dues línies rectes no poden tenir un segment comú»), etc., a banda, és clar, que pot servir de comanda lingüística.

En efecte els nostres postulats geomètrics també semblen sovint notes per a la construcció de línies i punts seguint, si de vegades

voleu, (en la mesura que és possible) l'estipulació que el punt no ha de tenir parts i que la línia tampoc no ha de tenir amplada (o gruix una superfície). i que alhora gaudeixen (si més no ~~aquí~~) d'una base lògica: per exemple ho seria que els extrems de les superfícies siguin línies (Def.6), perquè certament podem analitzar-hi línies, o que les línies que uneixen punts d'un pla pertanyin a aquest pla, perquè de fet dibuixem línies i marquem punts en el pla o podem trobar (si més no «dir que n'hi ha») línies i punts en l'anàlisi d'un pla. Endemés qualsevol estudi del pla o qualsevol estudi de les seves propietats a partir d'uns qualssevol punts i línies o de llurs qualssevol relacions també esdevindran segurament postulats (per tant n'hi poden haver una munió de diferents, depenent de l'habilitat de l'estudiós): tanmateix sembla útil ~~difícil~~ de buscar-hi la definició del pla, si és que amb això no es vol dir la manera de considerar els punts i les línies en el pla.

un punt divideix una línia, que

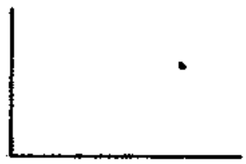
Alhora la determinació de dos plans que es creuen en una recta (cf.Eucl.XI,3), de dues superfícies en una línia, de dues línies en un punt, o que una línia divideix superfícies i plans (la circumstància que un pla o una superfície divideix l'espai, i.e sòlids -- cf.Eucl.XI.Def.2 -- té un particular punt d'interès a partir de les línies i dels punts que hi considerem, cf.Eucl.XI.Defs.3-7), el fet que una línia creua el pla per un punt (cf.Eucl.XI,1), que dues rectes que es tallen estan en un pla (cf.Eucl.XI,2), tots els postulats d'un qualsevol principi de continuïtat, etc., adapten i estudien les línies i els punts en les consideracions d'espai, i mostrarien per tant l'ús de línies i de punts, etc.

§ 55. Els angles.

Qualsevol entitat geomètrica que es dreça a partir de línies tindrà constantment la doble lectura de ser una construcció merament lingüística impossible de representar i la d'esdevenir quelcom que individuem en els nostres dibuixos, cosa que no implica que la sublimació lingüítica dels punts com a quelcom «sense parts» i de línies com a afers «sense amplada» (i de totes les corresponents entitats) no lleva que hàgim d'individuar les plurals entitats geomètriques a partir d'allò que no és mer registre: car des de continguts lingüístics que són meres negacions fóra impossible (en aquestes altures del descabdellament geomètric) cap passa nova.

Si més no s'admet que un angle és també un individu ~~real~~, sobretot dels nostres dibuixos i de les nostres maquetes (aquí), però també dels marcs de les portes, dels racons de les habitacions, etc. Però l'angle no és pas cap de les línies que el comprenen, sinó alguna individuació entre les línies, i per la comparació establim el més i el menys. ¿Quina és, però, aquesta individuació?

Circumscriguem-nos als angles entre línies rectes en el pla. La definició dels Elements (Eucl.I.Def.8) podria valer en la ~~mida~~ mesura que 'inclinació' no és sols un nom per a la tendència d'una cosa cap a un costat o cap a un altre, perquè l'angle recte, en aquesta accepció, no té inclinació, o no estimem que en tingui. Fet i fet, malgrat que hom hagi volgut provar l'existència dels rectes a partir de la caiguda d'una línia damunt d'una altra, això



sembla una dada lògica que individuem, i en el llenguatge quotidià considerem que no hi ha inclinació d'una línia damunt de l'altra (és el límit de dues inclinacions). Però entenent la inclinació com la separació o la divergència entre dues línies que es troben, llavors -- com sempre -- tan 'separació' com 'que es troben' són noms que s'usen també per a d'altres individus que no són línies nò són coses que es troben (no sembla haver-hi mai un començament genuí).

és fàcil de veure que els angles que s'inclinen cap al costat de la segona línia són els aguts, els que se n'allunyen més, els obtusos. D'altra banda es comprova que una separació o divergència sols individua un angle, i que la separació en qualsevol cas, i.e. l'angle, és un individu que està entre les línies.

La definició d'Euclides sembla encertada quan eixamplem l'ús del mot 'inclinació'. L'angle no seria pas la diferència de direcció entre dues línies rectes que es troben, perquè no hi individuem l'angle, sinó que diferenciem línies, a no ser, de bell nou que hom usi 'diferència de direcció', com ~~a sinònim de~~ 'separació', 'divergència', 'obertura', etc. D'altra banda no es podria definir per la quantitat de rotació per a dur una línia a l'altra ~~perquè una tal rotació és difícil de mesurar alhora que~~ no ~~evita~~ que calgui individuar l'angle. Finalment l'angle tampoc no seria el pla que «limitaria» les dues línies, sinó una individuació ad hoc.

La igualtat de dos angles rectes (Eucl.I.Def.10) adjacents es palesa àdhuc en els assumptes quotidians. Considerem de primer el següent: col.locats enmig d'un camp podem cercar la vora i seguir el camí més curt, respecte al qual els altres camins els tenim per més llargs i igualment per més llargs a mesura que ens separem del primer per la dreta o per l'esquerra: hi ha doncs una igualtat en els angles (que no cal que coincideixi amb les nostres mesures dels angles) o llur valoració es té per més o menys igual. Semblantment una plomada la veiem des de dalt i mantenim que cau sobre el terra pel camí més curt, etc. En tornar als nostre dibuixos mantenim paral.lelament la igualtat d'angles per la igualtat (valorada així) de distàncies des de la vertical a punts més o menys equidistants del seu peu*. (Recordem al lector que els Elements «proven l'existència d'angles rectes» a Eucl.1,11).

§ 56. El límit i la figura.

A Eucl.I.Def.13 trobem el terme 'ὅρος', que podríem traduir per 'línia divisòria', 'partió', sens dubte un terme de camp en els seus orígens, però que en afers geomètrics potser val la pena de traduir en conjunt per 'límit'; el límit és doncs quelcom ben patent del camp, dels nostres dibuixos, de les coses, de les maquetes: el límit individua quelcom respecte al qual es diferencia quelcom. Per tant usem uns tals límits en les coses planes i espacials, que s'individuen, si es vol, amb els seus límits (i.e. els límits entren en l'individu), amb l'afegit que podem individuar límits arreu en les coses de la naturalesa.

Una figura és -- segons Eucl.I.Def.14 -- un individu limitat: les línies (deixant el cas de la circumferència) i els angles no esdevindrien probablement figures (les línies no «contindrien» un individu); la qüestió remet en principi al mer ús dels noms, perquè es podria entendre per figura (1) les línies que tanquen un pla o un espai; (2) el pla o l'espai contingut (que les comprendria); (3) la forma. Però 'forma' sembla un mot d'ús proper al de 'cosa': en dir que dues coses tenen formes diferents, la diferència estaria entre les dues coses; això és, el fet que parléssim de la forma d'una rosa i de la forma d'una pedra respondria (i enllestint ara l'afer de pressa) a aquesta estructura entre la rosa i la pedra --

---

*Una qüestió de matís que ha anat sortint més o menys de manera implícita i que ja hem estudiat (§ 8): la relació és d'igualtat o és una diferència d'acord amb la síntesi dels termes; observi's que

A A

són diferents en tant que hi individuem en els termes el camp visual, tàctil i motor (per exemple dels ulls), i són iguals en tant que hi individuem en els termes visualitat (tot i que determinem en tots els camps, cf.per exemple § 2), afer que val així mateix quan valorem iguals dues coses per d'altres motius que els del camp visual.

En els casos que hem citat (camí pel camp, plomada) la igualtat difícilment sobrepassa la valoració, que més aviat sembla provenir dels nostres aprenentatges (el fet de travessar el camp pels biaixos duu un esforç igual, etc.), sense que una tal valoració sigui arbitrària, alhora que podem cercar d'altres mitjans per a assegurar-nos-en (una corda, per exemple).

D'altra banda podem inspeccionar la igualtat d'angles-distàncies dels nostre dibuixos tot modificant-ne la perspectiva, etc. El lector observarà que hi ha tota una imbricació de motius, fins a arribar a l'ús del transportador i a l'estudi numèric.

que també és una estructura de coses, a més de formes: però caldria l'ús de 'forma' perquè les coses no són iguals[9].

Apropant doncs (2) i (3) tant les línies com els cercles i els sòlids serien figures, mentre que caldria rebutjar (1) en la mesura que un hom no volgués individuar sols línies: tres circumferències màximes no ~~sabrien~~ individuarien mai l'esfera, etc. En conseqüència el fet de reservar en geometria el mot 'figura' per a (2) és una estipulació lingüística, amb un fonament prou comprensible: les nostres coses geomètriques (triangles, quadrats, cubs, etc.) estan limitades pels nostres punts, línies, superfícies, geomètrics. /φ

Prenguem quelcom ben quotidià: en prou jocs infantils cal fer un cercle, que és el lloc on els nens se salven, mitjançant una canya que grata el terra mentre el nen gira sobre ell mateix; el nen repassa, acabada la feina, que la distància entre un punt i el seu cos sigui igual — o la consideri igual — a la que hi ha entre el seu cos i un altre punt del solc, punts que marquen el límit del cercle: perquè, si en mantenir la canya ferma estima — canya i cos fent un tot — que conserva la distància entre la punta d'aquella i els seus peus, en construir el cercle no sols no ha tingut la seguretat de no modificar significativament aquella distància tant com ha durat el moviment, sinó que tampoc no ha pogut determinar la igualtat de distàncies mentre ha durat el gir, no ha pogut determinar la igualtat de distàncies entre dos punts presos del solc i el seu cos; la lògica de la construcció val per si mateixa i el reconeixement més aviat pot trobar-se en la previsió i en la resultant. Què és doncs un cercle per al nen? Sens dubte un individu, que té límits, ~~la distància~~ dels quals des d'allí i des d'aquell altre lloc equidisten d'ell, podent repetir la comparació de distàncies fins que se'n troba satisfet — per tant el cercle com a tal és una síntesi, alhora que un treball lògic relaciona distàncies des d'ell fins al límit, que s'estimen iguals.

Els nostres cercles són com els cercles dels nens: tenim per iguals les distàncies des d'un centre al límit, i les sospites que el cercle no era exacte rauen a descobrir que no hi havia ben bé radis iguals; però la igualtat, al cap i a la fi, és una estimació lògica (és una relació), i per això els nostres cercles són sols dibuixos amb més cura. La definició d'Eucl.I.Def.15 és certament paradigmàtica com a definició: un canvi de nom ('figura plana') i un estudi analític; cal remarcar — contra els oblits — que la igualtat és, en qualsevol cas, una estimació, una relació lògica,

---

[9] Una anàlisi no tan ràpida segurament duria a admetre que 'forma' i 'figura' són d'ús semblant a 'superfície' i per les diversitats de les superfícies: serien doncs mots-jòquer, mots plurals d'acord amb les necessitats expressives, amb el ben entès que no tots aquests mots tenen igual extensió d'intercanviabilitat amb els altres mots.

i que «exactament igual» implica que hom ho té per igual: però ho té per igual quan jutja que hi ha igualtat lògica ~~donada~~ patent, altrament esdevé un registre. D'altra banda tampoc no hi ha substitució lògica: en definir que tots els punts (llocs) són equidistants del centre, no hem de prendre'ns els registres lingüístics com a claus de lògica no ~~formal~~ lingüística: «tots», en aquesta accepció no ~~formal~~ lingüística, són els punts que hem considerat, i respecte dels quals jutgem que el centre es troba equidistant. Un cercle «perfecte» és aquell en el qual creiem que els punts considerats fins ara són equidistants -- altrament és un registre amb afecció; no ~~per~~ pel fet d'entendre afec*t*ivo*lo*ment (idealísticament) els registres, aquests contenen més lògica: per tant el cercle o esdevé un registre lingüístic, o és una consideració d'igualtat de distància i un reconeixement de síntesi. Un treball lògic.

Però insistim-hi: podem considerar perfectament que el cercle és una figura plana («sense gruix»), limitat per una línia («sense amplada»), «tots els punts de la qual» equidisten «exactament» d'un punt central (que «no té parts»); podem doncs registrar molt bé totes les entitats geomètriques de tal manera que sapiguem <u>a priori</u> que no existeixen cercles així en la natura. Es tracta més aviat que veiem malgrat tot que nosaltres mai no podríem treballar de fet amb cercles d'aquest tipus pel fet que no existeixen més que com a contingut (lingüístic) lògic, i que una tal informació és la de negacions, i la d'un «tots» que es refereix a negacions i que sols pot garantir quelcom que s'analitza en formalitat ('tots') i afecció, etc.

Fixem-nos també que la definició genètica consisteix a afegir determinacions: la d'una comanda més la definició de reconeixement o la d'una comanda, la conseqüent construcció i la corresponent definició. Certament es pot intentar de definir «construir un cercle», però llavors no definim «cercle».

Tant el centre com el diàmetre es descobreixen en l'estudi del cercle. Observi's solament que qualsevol prova del fet que el diàmetre biseca el cercle és fútil, perquè en qualsevol cas la igualtat dels semicercles és una dada de llur manipulació i de la inspecció lògica[10]; la impossibilitat i la futilesa deriven del fet que a partir de línies i de punts hom no prova els sectors; ~~essent-ne més aviat la posició~~ inspecció ~~d'aquests sectors plans la condició;~~ un nombre de línies i de punts individuats no dóna <u>per se</u> el sector pla: quan «es prova» la igualtat dels semicercles, ben mirat, es decideix la igualtat d'aquests individus plans al marge de les determinacions de línies i de punts.

---

[10] El nen col.locat enmig del seu cercle ja valoraria segurament els dos semicercles (que no contindrien la seva mitja volta) com a iguals, el fet de tallar en dos el cercle dibuixat i comparar-ne le parts n'imitaria el procediment, etc.

§ 57. La definició de línies paral.leles.

Qualsevol aproximació al tarannà de la geometria, com la que pretenem aquí, topa amb la qüestió de les línies paral.leles. El nombre de treballs sobre el tema és enorme perquè s'ha valorat que Euclides estableix el postulat cinquè com un fonament de tot el seu sistema geomètric; d'altra banda els esforços per a demostrar-lo s'han perllongat ~~estat assajats~~ durant segles, alhora que se n'ha defensat, a partir de la segona meitat del segle dinou, la indemostrabilitat; a més les geometries no euclidianes suposen precisament un postulat diferent del d'Euclides. Sembla que tota mena d'obstacles es drecin davant nostre per a impossibilitar-nos-hi un accés.

Tanmateix la defensa que el postulat cinquè sigui ~~és~~ demostrable o que no ho sigui ~~és~~ sembla circumscriure's al fet de «treure'l» de quelcom o de «no treure-l'en» (serien la resta de proposicions les que «surten» del postulat); però un moment lògic que passa a un segon no fa l'efecte que el substitueixi en cap accepció, ni que el segon en rebi res en tant que element lògic: si «treure» un moment d'un altre vol dir sols el pas del primer al segon, llavors tot es demostraria de tot; si vol dir que és una anàlisi d'un individu és segur si més no que la determinació de l'individu que és una part té els mateixos drets que la de l'individu que és un tot (i aquest alhora pot entendre's com una anàlisi d'un altre individu); si l'individu cregut important és la part, llavors la síntesi posterior determina quelcom que no surt pas de la part. No sembla doncs que hi hagi substitució lògica de coses per d'altres coses que tindrien ~~una «virtut» o~~ una «capacitat» per a fer més lògiques les primeres. Endemés la repetició d'un mateix moment lògic és la relació entre l'un i l'altre i la seva igualtat determinada (el fet d'haver-hi repetició en tant que oposat a la seva inconsciència).

La captinença de la demostració esdevé així quelcom a tractar com a problema, tot i que ara no és tan important el perquè s'ha cregut el postulat cinquè principi de demostració — afer que comparteix amb qualssevol altres principis — com el lloc lògic que ocupa. Més tard indicarem què cal entendre en geometria per «provar» i «demostrar» (§§ 62-63): un procés reflexiu (una racionalitat), a partir del tarannà del qual determinem (d'una manera vaga) un aprenentatge; no sembla pas una racionalitat cega (que no fóra cap racionalitat), sinó una d'habituada; d'aquí que no neixin poques confusions pel fet d'aplicar un hàbit racional a captinences de racionalitat que s'esforcen a no pensar solament així.

Ocupem-nos d'Eucl.I.Def.23: les línies paral.leles, se'ns diu, no es troben en allargar-les indefinidament; "no trobar-se dues línies" determina quelcom de llur consideració, i l'«indefinidament» o el «sense límit» sembla un registre perquè no hi ha cap altra determinació que admeti el nom 'sense límit'. és clar que podríem prendre la definició com a mer contingut (lingüístic) lògic en l'accepció que una línia «no té amplada» i que estem parlant «d'unes tals línies perllongades indefinidament»: pensaríem doncs «meres idealitats», però, com sempre, ens seria ben bé impossible de continuar qualsevol discurs amb els pensaments lingüístics de negacions. L'afer doncs ens traslladа pel cap alt a dues línies lògicament ~~donades~~ inspeccionades i a un registre, per tant hi ha aquí més el gaudi d'un valor ~~afectiu~~ afecció en la ~~in~~definició del fet de no trobar-se que una característica dins ~~dels límits~~ de la inspecció d'allò que són les línies paral.leles. Això valdria, és clar, tant per al discurs que defensés que les paral.leles no es troben si les allarguem indefinidament com per a aquell que afirmés que es troben en un punt situat a una distància infinita, com també per aquells que, prenent la línia recta com quelcom «perllongat indefinidament» acceptessin que les paral.leles no tenen cap punt en comú.

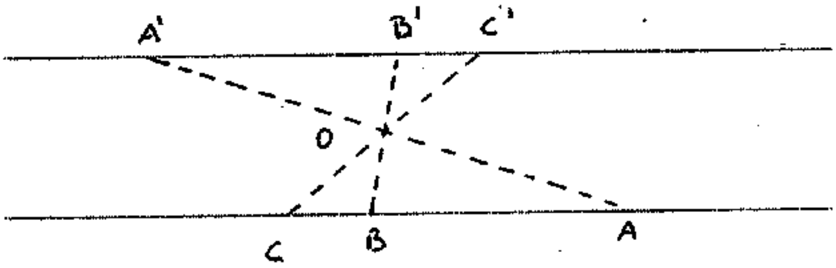
La definició no ~~afectada~~ idealitzada de les paral.leles torna a admetre doncs l'equidistància com un dels seus trets característics. Llavors podria fer així: dues línies rectes s'anomenen paral.leles quan els diferents punts de l'una són equidistants seguint la perpendicular i respectivament equivalents direccions als diferents punts de l'altra. Hom podria usar el mot 'tots' per als punts, però l'eficàcia lògica no lingüística no fóra més gran; d'altra banda l'esment al pla és sobrer: no sembla que tingui cap obligació d'haver d'incloure l'individu que és comprès entre les línies en el reconeixement de les paral.leles; la perpendicular a una línia tampoc no individua el possible pla entre les paral.leles, i la igualtat de distàncies és una relació lògica valorada així. Llavors dues línies equidistants «no es trobaran si les perllonguem»: una tal certesa lingüística no provindria pas de cap altre fet que de la circumstància que l'equidistància no apropa les dues línies i que no tenim més motius per creure que ho facin quan les perllonguem romanent d'una manera equidistant.

Observi's que l'equidistància no vol pas dir que una línia com un tot es trobi equidistant a l'altra com un tot; en aquest sentit la demanda de provar que el lloc geomètric dels punts equidistants d'una línia recta sigui precisament una línia recta sembla ~~induir a~~ incloure en algunes confusions. Estrictament parlant una colla de punts ~~lògicament donats~~ no és capaç d'individuar una línia sense la reflexió corresponent; però la definició per l'equidistància no solament no pot provar que una colla de punts equival lògicament a una línia, sinó que ni ho intenta, perquè l'objecció valdria àdhuc per a la línia suposadament donada: una línia com a tal no equival lògicament a una colla de punts. Ara bé: la definició no determina pròpiament l'equidistància entre una línia com un tot i una altra línia com un tot; es tractaria aquí d'una manera de parlar, perquè l'equidistància es troba entre els punts de l'una i de l'altra, alhora que no hi hauria paral.leles sense la inspecció corresponent ~~si les línies no es donguessin ja~~ ~~donades~~ inspeccionades. Més aviat tenim, com sempre en aquests contextos, que la definició analitza i reconeix coses, que aquí, tractant-se d'una relació entre dues coses,

Iostensius

individua a més distàncies i les relaciona, i que tot això rep alhora una significació merament lingüística a partir de les concepcions lingüístiques de punts i de línies.

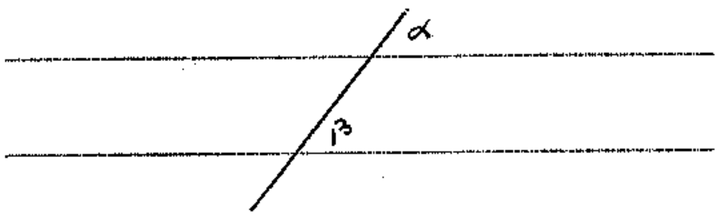
Fet i fet anomenem 'convergents' les línies, les distàncies entre els punts de les quals van essent més petites, i 'divergents' quan va creixent, sempre seguint línies per exemple les perpendiculars a una línia, i seguint-les en un ordre d'equivalent direcció. Però tractant-se de la relació entre dues coses hom ha de relativitzar la manera com definim la relació entre dues línies, i potser calgui sols distingir entre maneres més planeres de definir i maneres més complexes: per exemple hom podria definir, com s'ha fet i amb encert, que dues línies rectes s'anomenen paral.leles si una ~~d'elles~~ d'aquestes conté dos punts oposats a dos altres punts de l'altra respecte al punt mitjà d'una transversal, per exemple



on AA' és la transversal escollida, i B' oposat a B respecte a O, C' a C també respecte a O, etc.

§ 58. Introducció al cinquè postulat.

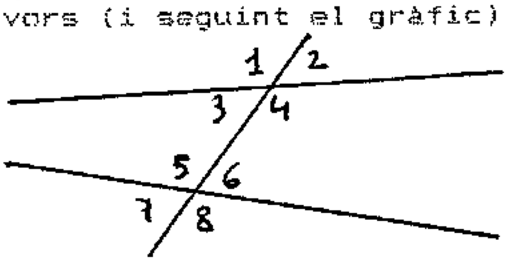
La circumstància que les paral.leles no tinguin cap punt en comú és un fet, essent la resta un valor afectiu. Recordem que la definició de les paral.leles, a part de ser registre, consisteix en una individuació de línies i en una inspecció de les relacions d'acord amb la nostra capacitat de reconèixer coses i de relacionar-les: individuem línies en els nostres dibuixos, per exemple, les tenim com tan primes com ens sigui possible i per això fins i tot les definim a través de registres que ens obliguen a la reiteració i a l'autonegació d'allò que determinem, cosa que no obsta que, a banda dels usos lingüístics, sols puguem determinar no lingüísticament la línia perfecta, la recta perfecta, la igualtat perfecta com aquelles que determinem com a vàlides. Quan estudiem doncs el dibuix d'una línia transversal a dues paral.leles (o qualsevol cosa que els és transversal) no fem res més d'allò que fem en considerar unes simples paral.leles. En el dibuix



¿hi ha alguna altra manera d'establir la igualtat de l'angle α i de l'angle β que no sigui a través de la lògica ~~donada~~ inspeccionada? ¿no admetem la igualtat, quan no és un registre, tot valorant una relació? ¿per què hem de creure que aquí hi ha un afer divers? Moguts per escrúpols analítics podem escorcollar curosament els respectius angles, fins i tot amb l'ajut d'instruments, per tal de comprovar que hi ha quelcom igual -- o descobrir que no hi ha una exacta igualtat, que això està mal dibuixat perquè caldria que els angles fossin iguals: però unes tals consideracions són només la conseqüència de la valoració de les paral.leles i de la transversal, i.e. la conseqüència de la valoració quotidiana i que hem après. Aboquem en l'estudi analític i detallat allò que hem après en la valoració confiada de cada dia.

La valoració de qualsevol relació d'angles en l'encreuament de dues paral.leles amb una transversal mereix un comentari semblant: hi establim igualtats talment com valorem que són iguals dues qualssevol altres coses. I afirmem que la suma dels dos angles adjacents de dues rectes que es tallen és igual a dos rectes, en el cas de no ser un mer registre, quan treballem amb la lògica ~~posicional~~ inspectora. Per això mateix hi hauria la possibilitat de definir les línies rectes paral.leles a partir de les relacions d'igualtat corresponents als angles que formen amb una transversal, sense que calgués «provar» que una quarta línia transversal a les paral.leles també basteix angles que mantenen relacions d'igualtat: quan un hom no fa verbalisme s'adona que no hi ha aquí substitució lògica, que tota determinació és «particular» i que després hi ha estructures entre particulars, les generalitzacions lingüístiques, etc.

En el cas que la trasversal talli dues línies que no són paral.leles, llavors (i seguint el gràfic) establim les igualtats



~~pesades~~ inspeccionades entre 1 i 4, 2 i 3, 5 i 8, 7 i 6, i en totes les altres comparacions apareix una relació més/menys; d'altra banda la suma de 1 i 3, de 2 i 4, de 5 i 7 i de 6 i 8 és igual, respectivament, a dos rectes. Essent 5 més petit que 1, 3 més la part corresponent de 1 igual a 5 no fa dos rectes (en registre: la suma de 3 i 5 val menys de dos rectes); pel mateix procediment tenim que essent 6 més gran que 2, la suma de 4 i 2 fan dos rectes: obrint 2 fins a fer-lo igual a 6 aquella suma supera els dos rectes, i per això afirmem, en el registre, que la suma de 4 i 6 és més de dos rectes. Ara bé: que les línies es tallin pel cantó convergent esdevé en qualsevol cas una qüestió de fet; perquè, o es tallen ja, o de fet les perlloguem fins que es tallin: més enllà hi ha valor lingüístic.

Per tant el postulat cinquè podria considerar-se de primer una definició més al costat de les altres, on hi ha registres que sovint permeten, en una part més gran o més petita, un estudi no ~~formal~~ lingüístic que es basa en l'anàlisi, en la consideració de relacions (quan s'estudien relacions de coses), etc. En efecte, quan tenim dues línies rectes tallades per una tercera i quan per l'estudi dels angles arribem a admetre que la suma d'un angle interior més un altre angle igual al segon angle interior del mateix costat fa menys de dos recte, llavors sovint és fàcil perllongar les línies i que es tallin -- d'altres ja es tallen en el dibuix. Alhora, com prou definicions, el postulat cinquè d'Euclides mantindria molt de registre: ho fóra l'esment de la suma dels dos angles interiors (que podria prendre's també com una manera de parlar, d'expressar un recorregut lògic), ho fóra l'«indefinidament», i ho fóra la comanda d'allargar les línies, una suggerència de construcció; potser ja resulta interessant que l'«indefinidament» l'adjectivi: tot plegat ens fa adonar que ens trobem en una expressió lingüística que fa allò que fem cada dia, un ús de llenguatge que en part permet certa ostensivitat i un ús de llenguatge com a registre. Justament pel valor afectiu del registre un hom es creu que s'allunya de qualsevol cas donat o que determina alguna cosa més enllà d'un fet lògic ~~posat~~ ostensiu i enllà de quelcom que s'analitza en so i afecció, quan el valor lògic (no lingüístic) màxim que és capaç de comunicar aquella expressió rau en dues línies tallades per una tercera, on seguim la lògica dels angles i on, o les línies es tallen, o les allarguem fins que es tallen, i.e. tot un procés lògic de reconeixement, de relació i de construcció. El llenguatge ha estat eficaç si permet això, ja sigui dibuixat o representat. ¿I si les línies són molt poc convergents?¿no serà impossible allargar-les prou? Certament: però llavors tampoc no n'augmenta l'eficàcia no lingüística el fet ~~de dir~~ d'afegir «que es tallaran», i una imaginació que fa que es tallin «molt lluny» té aquest valor lògic.

El valor lògic del postulat cinquè rau a proporcionar-nos un seguiment reflexiu ~~donat~~, com el valor lògic d'una definició es troba en les consideracions a les quals invita. El postulat i les definicions del llibre I divergeixen potser en la circumstància que el primer convida a una experiència lògica prou vària (hi ha un possible reconeixement de línies, unes relacions ~~d'ampliada~~, la construcció de línies, un estudi final), i per això creix el paper ~~del registre,~~ de la formulació lingüística, però la resultant des d'un punt de mira d'interessos lògics és del tot equivalent. Tant el postulat com les definicions esmentades són convits lingüístics per a determinar ~~posicionalment~~ actes capaços d'inspecció, quan no ~~els~~ tenim aquells convits com a mers registres. La separació entre les definicions i el postulat és per als nostres interessos del tot secundària i en qualsevol cas difereixen més per la formulació lingüística i per la barreja d'elements determinatius dispars en el postulat, quan abandonem els registres, que per qualsevol consideració de l'evidència i de la claredat.

§59. <u>El cinquè postulat i les paral.leles.</u>

Tot el que anem comentant pot ser valorat, és clar, a la llum de les definicions lingüístiques, que contenen negacions, dels punts i de les línies, que les «purificarien» ~~de la posicionalitat~~: però fins i tot el propi Plató admeté que la raó discursiva de la geometria necessita de les figures imaginades o dibuixades.

Dèiem doncs que el valor lògic del postulat cinquè rau en una descripció de relacions entre coses. Cal establir llavors <u>a priori</u> la inutilitat d'usar-lo per a estalviar-se el corresponent treball lògic, i.e. que allò que «se'n treu» val per ~~ell~~ si mateix amb les mateixos drets que el postulat. Anem a les proposicions mateixes del cas exemplar -- que com sempre instrumentalitzem -- dels <u>Elements:</u>

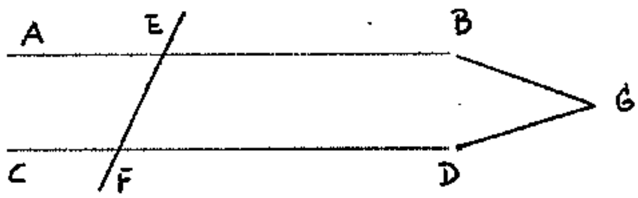
«<u>Proposició 27</u> [<u>Eucl</u>. I,27]

Si una línia recta que talla dues línies rectes fa que els angles alterns siguin iguals l'un a l'altre, les línies rectes són paral.leles l'una a l'altra.

<u>Perquè faci la línia recta EF, que talla dues línies rectes AB, CD, que els angles alterns AEF, EFD siguin iguals l'un a l'altre;</u>

<u>dic que AB és paral.lela a CD.</u>

<u>Perquè, si no, AB, CD, en ser perllongades, es trobaran en la direcció de B, D o en la d'A, C.</u>



<u>Perllongui-se-les i trobin-se en la direcció de B, D, a G.</u>

<u>Llavors, en el triangle GEF, l'angle exterior AEF és igual a l'angle interior i oposat EFG;</u>

<u>cosa que és impossible.</u> [I.16]

<u>Per això AB, CD, en ser perllongades, no es trobaran en la direcció de B, D.</u>

<u>Similarment es pot provar que tampoc no es trobaran en la direcció d'A,C.</u>

<u>Però línies rectes que no es troben en cap direcció són paral.leles;</u> [Def.23]

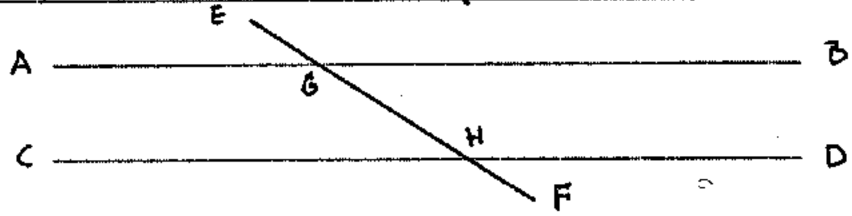
<u>per això AB és paral.lela a CD.</u>

<u>Per això, etc.</u>

Proposició 28

Si una línia recta que talla dues línies rectes fa que l'angle exterior sigui igual a l'angle interior i oposat del mateix costat, o que els angles interiors del mateix costat siguin igual a dos angles rectes, les línies rectes són paral.leles l'una a l'altra.

Perquè faci la línia recta, que talla dues línies rectes AB, CD, que l'angle exterior EGB sigui igual a l'angle interior i oposat GHD, o que els angles interiors del mateix costat, o sigui BGH, GHD, siguin igual a dos angles rectes;



dic que AB és paral.lela a CD.

Perquè, donat l'angle EGB igual a l'angle GHD,
mentre que l'angle EGB és igual a l'angle AGH, [I.15]
l'angle AGH és també igual a l'angle GHD;
i són alterns;
per això AB és paral.lela a CD. [I.27]

Tornem-hi: donat que els angles BGH, GHD són igual a dos angles rectes, i que els angles AGH, BGH són també igual a dos angles rectes, [I.13]
els angles AGH, BGH són igual als angles BGH, GHD.

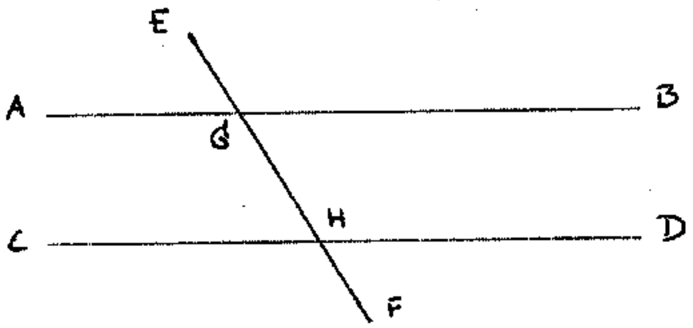
Sostreguem l'angle BGH de cadascun;
per consegüent l'angle restant AGH és igual a l'angle restant GHD;
i són alterns;
per això AB és paral.lela a CD. [I.27]
Per això etc.

Proposició 29.

Una línia recta que talla línies rectes paral.leles fa que els angles alterns siguin iguals l'un a l'altre, que l'angle exterior sigui igual a l'angle interior i oposat, i que els angles interiors del mateix costat siguin igual a dos angles rectes.

Perquè talli la línia recta EF les línies rectes paral.leles AB, CD;

dic que fa que els angles alterns AGH, GHD siguin iguals, que l'angle exterior EGB sigui igual a l'angle interior i oposat GHD, i que els angles interiors del mateix costat, o sigui BGH, GHD, siguin igual a dos angles rectes.



Perquè, si l'angle AGH és desigual a l'angle GHD, un d'ells és més gran.

Sigui més gran l'angle AGH.

Afegeixi's l'angle BGH a cadascun;

llavors els angles AGH, BGH són més grans que els angles BGH, GHD.

Però els angles AGH, BGH són igual a dos agles rectes; [I.13]

llavors els angles BGH, GHD són menys de dos angles rectes.

Però les línies rectes perllongades indefinidament des d'angles menors que dos rectes es troben; [Post.5]

per això AB, CD, si són perllongades indefinidament, es trobaran;

però no es troben, perquè són per hipòtesi paral.leles.

Per això l'angle AGH no és desigual a l'angle GHD,

i per això li és igual.

Una altra vegada; l'angle AGH és igual a l'angle EGB; [I.15]

llavors l'angle EGB és també igual a l'angle GHD. [N.C. 1]

Afegeixi's l'angle BGH a cadascun;

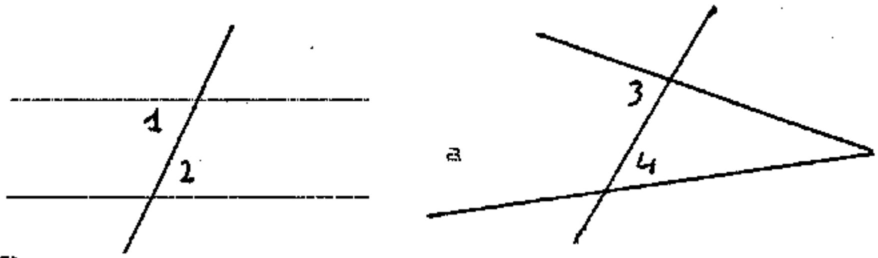
llavors els angles EGB, BGH són igual als angles BGH, GHD. [N.C. 2]

Però els angles EGB, BGH són igual a dos angles rectes; [I.13]

per això els angles BGH, GHD són també igual a dos rectes.

Per això etc.»

La proposició 27 es funda en Eucl.I,16, però el fet cabdal està en l'ús de la reducció a l'absurd, que sembla un joc. Noti's de primer que se suposa que ja s'ha provat que l'angle 3 ha de ser més gran que el 4 -- quelcom aquí ja après: per això trobem, a banda de la reducció a l'absurd, elements típicament demostratius -- però la proposició Eucl.I.16, on remet, afirma que si un dels costats d'un triangle s'allarga, l'angle exterior és més gran que els angles interiors i oposats, però això és una conseqüència d'una proposició anterior, Eucl.I.4, que prova la igualtat de dos triangles que tenen dos costats iguals i l'angle contingut igual; i la prova és per superposició; no havent-hi diferència quan hi ha superposició, la igualtat seria ~~posicional~~ ostensiva, i la deshabituació de l'ús d'aquest teorema en qualsevol proposició no oferiria d'altra lògica. Llavors els motius per a no concedir el punt de partida haurien de fer no adoptar el camí lògic de la reducció: perquè passem de



en la ~~mida~~ mesura que no resseguim registres, i llavors, no havent-hi una estructura d'igualtat entre 1/2 i 3/4, alhora essent diferents (1/2 diferent de 3/4), hem mostrat que no es tracta del cas de l'esquerra, sinó del de la dreta: se'ns convida senzillament a una substitució del cas. Però essent un exemple diferent i no igual a l'altre, l'única manera d'admetre que el de l'esquerra és el de dos angles alterns interns iguals per a rectes paral.leles i una transversal rau a reconèixer-hi ~~posicionalment~~ les paral.leles i la igualtat esmentada per mitjà de la inspecció!: altrament, com ho sabríem?

Observi's que no pressuposem una determinada definició de paral.leles, un afer ara inessencial, sinó el mer canvi d'exemple i de la necessitat de tornar al primer tal i com l'havíem deixat. En el cas d'acceptar que les paral.leles no es defineixen per no trobar-se en cap punt, la proposició hauria de modificar-se, però això no és un problema dels <u>Elements</u>[11].

Per tant l'enunciat de la proposició I.27 sembla una definició de dues paral.leles tallades per una transversal, que s'acompanya del consegüent excurs demostratiu.

En assenya~~r~~lar la reducció a l'absurd com el mètode pel qual acceptem la proposició contrària d'aquella que cal provar tot deduint-ne conseqüències que no volem acollir, s'adverteix que, en no voler-ho fer, hom s'adona que es troba en un cas <u>diferent</u> d'un

---

[11]Fet i fet aquí com en <u>Eucl</u>.I,29 la definició de paral.leles per mitjà de rectes que no es tallen en perllongar-les és allò que permetria una simplificació de postulats. Si més no la genialitat dels <u>Elements</u> estreba també ~~en~~ remetre aquesta reducció a l'absurd → a al principi de no contradicció, car les línies o es troben o no es troben, el primer cas és l'anotat pel postulat cinquè, el segon per la definició de paral.leles, per tant la falsedat d'un cas remet a l'altre: potser caldria cercar en aquesta direcció la necessitat de definir les paral.leles per les línies que perllongades indefinidament no es troben, mentre que el postulat apuntaria també a la necessitat de garantir els punts d'intersecció per a la construcció de figures. Però llavors hauríem de diferenciar aspectes diversos: (1) l'afany de simplificació (malgrat que la resultant sembla sols aparent); (2) la definició lingüística de les paral.leles (amb un contingut lògic de negacions); (3) l'ús del principi de no contradicció entre quelcom que sols és lingüístic i quelcom que també pot ser inspeccionat (que deixa els afers tal qual).

altre (per això hi ha lingüísticament un 'no'), com el punt de partida palesa amb el canvi d'exemple. Així el motiu per a acceptar allò que calia provar se circumscriu a la lògica de la mateixa cosa[12].

La proposició I.27, com les altres, s'ofereix com a demostració, sens dubte, però ja tindrem ocasió de tractar amb més detall la naturalesa d'aquest procés. La proposició I.28 es presenta de bell nou com una demostració a partir de l'anterior, i la proposició I.29, que té elements típicament demostratius, enclou també una reducció a l'absurd: arribem que les dues línies es tallen (valor lògic màxim del postulat cinquè) quan dues paral.leles no sembla que es tallin (un fet, malgrat que Euclides sols les definí així). Ara bé: com el cas de les paral.leles és diferent del cas presentat pel postulat cinquè, concloem que el postulat cinquè no tindria cap eficàcia lògica a l'hora de tractar les paral.leles, per més que els seguits demostratius ens en fessin la impressió.

§ 60. L'equivalència de postulats.

S'acostuma a estimar la circumstància per ~~tenir l'expressió~~ «per un punt exterior a una recta passa sols una línia paral.lela» com un postulat alternatiu del d'Euclides. El lector podrà per ell mateix extreure que es tracta d'un ordre de construcció i/o de la constatació d'un fet lògic que no tindria res a veure amb el postulat d'Euclides; d'altra banda sembla que no el pot demostrar sinó per mitjà de reduccions a l'absurd ~~(per tant el posa a l'afecta)~~[13].

[12] La crítica a la prova per reducció a l'absurd no lleva, és clar, l'admissió d'allò que es volia provar quan és el cas (com aquí) que ho podem inspeccionar fàcilment. Notí's curosament que no es tracta ara de jutjar la sistematització matemàtica dels Elements —— un dels llibres més importants de la història de la ciència —— sinó d'un estudi dels fonaments de les disciplines matemàtiques, en les quals prou dels problemes són comuns en la matemàtica grega i en la contemporània: no sols n'és un exponent la reducció a l'absurd, sinó que així mateix llavors com ara hi ha tota una colla de supòsits, no sempre suficientment prou clars, que s'estenen des de les concepcions de l'irracional i de les relacions entre nombres i geometria fins a la valoració de la lògica i del principi de no contradicció passant per l'estudi de la proporcionalitat o del tarannà d'un procés demostratiu. En veurem alguns més tard.

[13] Trobareu la prova d'Eucl.I,29 i del propi postulat cinquè per mitjà de l'axioma esmentat a diversos llocs, per exemple Heath, The thirteen books of Euclid's Elements I, pàgs.312-313; aquest autor recull també una bona colla de provatures històriques per demostrar el cinquè postulat, cf.ibidem I,pàgs.202-220.

La història de les demostracions del postulat cinquè d'Euclides ha estat llarga, i normalment han estat criticades pel pressupòsit de quelcom que caldria potser provar. Des del nostre punt de mira hauríem de repetir primerament que el postulat cinquè d'Euclides no sembla tenir, pròpiament parlant, capacitat per a posar l'existència de línies paral.leles (aquestes es posen per ~~elles~~ mateixes); i hauriem d' afegir que qualsevol altra demostració del → si postulat cinquè per reducció a l'absurd a partir d'un qualsevol pressupòsit (i.e. quelcom que ~~es posa~~ s'inspecciona lògicament o que ~~s'afecta~~ es registra) no en té per a ~~posar~~ inspeccionar (o ~~afectar~~ registrar) el que és lògicament possible del postulat cinquè: perquè l'ús de la reducció a l'absurd palesa que hom ~~posa~~ inspecciona (o ~~afecta~~ registra) lògicament arreu, per més que tot esdevé encobert per expressions demostratives. D'altra banda les proves de les propietats de les paral.leles i de les línies secants sense recórrer a la reducció per l'absurd exemplifiquen més aviat una ~~posicionalitat~~ inspecció lògica vària de les unes i de les altres i de les seves propietats o llur consegüent afecció.

Concloguem: en la creença que hi ha postulats equivalents al d'Euclides, que hom demostraria per reducció a l'absurd (quan no és així es tracta d'una assumpció ~~posicional~~ inspectora o ~~afectada~~ afeccional de paral.leles i de secants sense més), i en el fet de tenir el postulat cinquè i els seus equivalents com a indemostrables, hi ha una certa ambigüitat que es mou a diferents nivells: (1) perquè s'està parlant d'acord amb un hàbit racional, en perjudici d'una racionalitat menys habituada; (2) perquè el propi tarannà d'aquella racionalitat fa que hom no tingui cura que ~~posa o afecta~~ inspecciona o registra més del que voldria admetre (reduccions a l'absurd); (3) perquè — i al marge de qualsevol referència als Elements — una axiomatització sembla un assaig per circumscriure allò que ~~es posa~~ s'inspecciona o es registra, i allò que es repeteix no se subsumeix en el repetit (que és un altre): l'axiomatització tindrà més un caràcter d'utilitat (hom aprèn coses que es repeteixen) que teòric. No sembla haver-hi postulats equivalents i la indemostrabilitat de qualsevol principi tindria un criteri en l'expressió demostrativa pels varis nivells d'ambigüitat dels punts anteriors, altrament ens adonaríem que tant els principis com la mateixa racionalitat demostrativa tenen una pròpia originalitat lògica (i.e. són la seva pròpia indemostrabilitat).

§ 61. Les nocions comunes.

Les consideracions a l'entorn del cinquè postulat haurien d'encaminar-nos a una discussió generalitzada del postulat de les paral.leles en les plurals geometries no euclidianes, afer que en part deixarem per més endavant. Passem doncs a un altre ordre de qüestions a propòsit de les nocions comunes: sabent que l'atribuació euclidiana i l'objectiu exacte de les quals podrien ser més o menys discutits, val la pena que les tractem de la forma més genèrica possible.

Així nosaltres podríem fer-les treballar com a mers registres, i llavors hi hauria un tal contingut lògic (lingüístic), que s'analitzaria en so i afecció, o provar també d'inspeccionar així mateix casos.

En alguna accepció no existeixen -- permeti-se'ns seguir la terminologia grega -- nocions comunes o axiomes comuns: perquè hi ha formalitats equivalents mentre la repetició de registres no suposa l'anul.lació d'algun dels termes; o perquè l'equivalència d'estructures de coses, per exemple la de les relacions d'igualtat, comporta que les relacions de cada estructura siguin privatives dels corresponents termes, com es veu en

x x a a
x a

i la racionalitat es descabdella moment a moment[14]. ¿Per què doncs

---

[14]Compari's amb els textos següents: «Hom ha observat, per exemple, que un pes A de 10 grams i un pes B de 11 grams produïen unes sensacions idèntiques, que el pes B no es podia tampoc discernir d'un pes C de 12 grams, però que es distingia fàcilment el pes A del pes C. Els resultats bruts de l'experiència es poden doncs expressar per les relacions següents:

$$A = B, \qquad B = C, \qquad A < C$$

que poden considerar-se com la fórmula del continu físic.

Aquí hi ha un desacord intolerable amb el principi de contradicció, i és la necessitat de fer-ho acabar que ens ha forçat a inventar el continu matemàtic.

Estem obligats a concloure doncs que aquesta noció ha estat creada de cap a cap per l'esperit, però que és l'experiència que li ha donat peu.

No podem pas creure que dues quantitats iguals a una tercera no siguin iguals entre si, i és així com arribem a suposar que A és diferent de B, i B de C, però que la imperfecció dels nostres sentits no ens hauria permès de discernir-los» (H.Poincaré, La science et l'hypothèse, pàgs.34-35).

«Il.lustrem aquesta manera de veure la natura de les proposicions matemàtiques prenent un altre exemple de veritat matemàtica -- o millor lògica --, citat freqüentment, o sigui la proposició que sempre que a=b i b=c, llavors a=c. Amb quins fonaments s'afirma aquesta, així anomenada, "transitivitat de la identitat"?¿és de natura empírica i per tant si més no desconfirmable per l'evidència empírica? Suposem, per exemple, que a, b, c, són tons de verd, i que tot el que podem veure és a=b i b=c, però clarament a≠c. Un tal fenomen passa de fet en certes condicions: ¿el considerem una evidència que desconfirma la proposició en consideració? És indubtable que no: arguiríem que si a≠c, és impossible que a=b i b=c; entre els termes d'una d'aquestes últimes parelles, si més no, hem d'obtenir una diferència, malgrat caldria parlar de la validesa universal d'aquests principis? En aquest punt — repetim-ho — s'oblida sovint que en les exposicions de la ciència hi ha alguns elements d'utilitat: es resumeix o s'exemplifica quelcom l'ús d'equivalents del qual sovinteja en el treball o en el conjunt de les disciplines, i que reflecteix sovint alguna cosa ja apresa i que hom no té cap escrúpol a expressar-ho sols lingüísticament; es tracta d'una comanda de tenir-ho ja sabut tot obviant que l'equivalent és sempre una altra cosa.

Encara millor: són els propis usos lingüístics els que ho permeten; dues coses iguals a una tercera són iguals entre si com l'home té dues cames; una gran part del nostre material lingüístic és usat merament com a registre, tant perquè sols pot ser registre com pel fet que no tenim cap necessitat d'estar pensant ~~posicionalment~~ (inspeccionant) coses òbvies i apreses reiteradament; hi ha hagut un aprenentatge lingüístic: això val per als principis comuns, com per a quasevol altra entitat geomètrica o no geomètrica, i en aquesta accepció hi ha pensament lingüístic (que és afecció) que reflecteix una habituació i el seu aprenentatge. Tanmateix, com hem anat insinuant ací i allà, no podem confondre el nostre domini lingüístic geomètric i el tema geomètric d'on hem partit per a aquest aprenentatge, tot i que el domini lingüístic inclogui estipulacions lingüístiques ('indefinit', etc.). No es tracta doncs de no pensar lingüísticament (la geometria o allò que sigui) — d'aquí que una certa ambigüitat entre inspecció i afecció sigui inherent fins i tot en els estudis més elementals — sinó de no deixar-nos arrabassar talment per les afeccions lingüístiques que ens creguem que contenen una virtualitat estranya (afecció que deu brollar de l'aprenentatge) per la qual resolem l'afer de la racionalitat.

La quarta noció comuna dels Elements esdevé particularment curiosa: sigui euclidiana o sigui una interpolació posterior, la important proposició d'Eucl.I.4 mana de superposar dos triangles per a provar-ne la igualtat. Entre els matemàtics no s'acostuma a tenir la coincidència per la garantia de la igualtat, ja que hi hauria en el fons una petició de principi, que nosaltres podríem explicar de la següent manera: mentre les figures es mantinguessin separades no hi hauria coincidència, quan coincidissin no hi hauria igualtat de figures, sinó sols una figura; com que de fet no hi ha coincidència entre dues figures, afirmem que són iguals aquelles que coincidirien perquè la igualtat és una relació prèvia a l'altre discurs.

---

que pugui ser sols subliminar. I rebutjaríem la possibilitat d'una desconfirmació empírica, i la idea que una prova empírica fos aquí rellevant, sobre la base que la identitat és una relació transitiva en virtut de la seva definició o en virtut dels postulats fonamentals que la governen. D'aquí que el principi en qüestió sigui vertader a priori.» (C.G.Hempel, On the nature of mathematical truth, pàg.380).

coses dibuixades

Fixem-nos, contra qualsevol mala interpretació, que la igualtat no s'obté de cap experiència que no sigui un treball lògic; tinguem per exemple dos segments dibuixats en els dos doblecs d'un full; de fet no hi ha confusió natural dels doblecs en la superposició, però som capaços de distingir les dues ~~figures~~ a contrallum fins que l'una amaga l'altra. ¿Com sabem que són iguals o que l'una és més gran o més petita que l'altra? Simplement quan les desconjuntem i les contrastem. En el cas que la superposició enfosqueixi la línia primera que tenim establirem una relació de quantitat o d'igualtat per la relació de color, però llavors hi ha una relació de causalitat amb els dos segments. ~~segons com es mirés la igualtat/majoritat fóra dels colors.~~ cf

Posem encara un nou exemple: tenim a la mà una canya, que encaixa perfectament entre dues coses i entre dues altres; l'operació, i.e. el fet de col.locar la canya entre els dos objectes és <u>un procés lògic</u> (tenim aquest treball). Al costat d'aquest treball -- si no considerem la igualtat de distàncies donada independentment del nostre útil -- no tenim cap altra igualtat que la de la nostra eina, una mera identitat de la canya: <u>l'individu és igual a ell mateix</u>; la representació de la doble operació no fa més que reblar aquest fet lògic.

I tots els postulats sobre la igualtat (o la congruència) de figures serien registres o remetrien a la inspecció lògica corresponent.

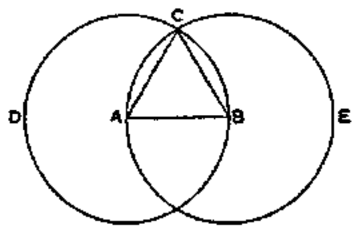
§68. Eucl.I,1-I,5: demostració, contrucció i deducció.

Tenim pendent de comparar una mica algunes de les consideracions que hem anant fent amb una geometria no-euclidiana, ni que sigui d'una manera puntual. Però encara no hem dit res de la demostració ni gaudim, cal admetre-ho, de cap caracterització de la geometria: intentem-ho a partir del llibre I dels Elements.

Prop.I.1.

Construir un triangle equilàter amb una línia recta donada.

És un problema (quelcom a fer): es dibuixen dos cercles des dels extrems de la recta donada (Post.3), que es tallen en el punt C (hom hi afegiria un postulat de continuïtat obviat per Euclides) i es tracen les línies AC i CB (Post.1); admetent-se la igualtat



de AC i AB i de CB i AB respectivament (Def.15), tenim la igualtat entre AC i CB (N.C.1), i s'acompleix doncs la definició de triangle equilàter (Def.20).

És obvi que no podem avaluar amb certesa el grau de voluntat axiomatitzadora d'Euclides quan ignorem l'abast exacte dels postulats[15]. Si més no el lector del llibre I observa que totes les proposicions es basen en les anteriors alhora que poden remetre als principis establerts al començament del llibre, siguin definicions, postulats o nocions comunes.

Notí's que el problema conté una part constructiva i una part demostrativa (o que prova). Però per a la caracterització del mètode geomètric val més transcriure tota sencera una proposició:

Prop.I.2.

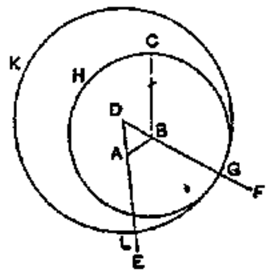
«Col.locar en un punt donat una línia recta igual a una línia recta donada.

---

[15] S'entén per exemple que A.Seidenberg hagi pogut defensar (Did Euclid's Elements, book I, develop geometry axiomatically?) que Euclides no pensà d'exposar el llibre I dels Elements d'una manera axiomàtica.

Sigui A el punt donat i BC la línia recta donada.

Es demana doncs de col.locar en el punt A una línia recta igual a la línia recta donada BC



Uneixi doncs la línia recta AB el punt A i el punt B (Post.1); i construeixi's sobre seu el triangle equilàter DAB (I,1).

Traci's les línies rectes AE, BF en una línia recta amb DA, DB (Post.2);

amb centre B i distància BC descrigui's el cercle CGH; i una altra vegada, amb centre D i distància DG descrigui's el cercle GKL (Post.3).

Llavors com el punt B és el centre del cercle CGH,

BC és igual a BG

Una altra vegada: com el punt D és el centre del cercle GKL,

DL és igual a DG (Def.15).

I en aquests DA és igual a DB; per això el restant AL és igual al restant BG (N.C.3).

Però s'ha provat que BC és igual a BG; per això cadascuna de les línies rectes AL, BC és igual a BG.

I coses iguals a una mateixa cosa són també iguals entre si; per això AL és també igual a BC (N.C.1).

Per això en el punt donat A s'ha col.locat la línia recta AL igual a la línia recta donada BC. Cosa que s'havia demanat de fer».

Intentem de considerar una mica el nostre propi seguiment de la proposició: (1) se'ns va ordenant la construcció d'una línia AB, d'un triangle DAB, de cercles, etc., activitats de modificació activa de la naturalesa; nosaltres entenem de tal manera una comanda lingüística que tracem un dibuix sense que aquí n'hi hagi cap estudi: l'acció de dibuixar un cercle no és el seu estudi (cada passa determinativa té el seu valor lògic); podrà haver-hi pel cap alt una representació imaginària, que la determinació que dibuixa copia, i.e. esdevé un fet lògic que es dóna sovint la comanda de construcció. Trobem doncs molt natural traçar una línia AB i un triangle equilàter DAB, allargar els costats DB i DA cap a ~~Ø~~F i ~~Ø~~E, traçar el cercle amb centre en B i distància BC i un altre cercle amb centre D i distància DG. (2) Considerem així mateix natural que BC sigui igual a BG, DL a DG i DA a DB, «per tant» AL és igual a BG i, en acabant, AL a BC. De fet les primeres igualtats entre els radis dels cercles esdevé òbvia a partir de la definició de cercle, com la igualtat de costats d'un triangle equilàter ve donada en la corresponent definició; mentre tenim per iguals DA i DB, DL i DG, respectivament, «sabem» que si traiem els primers iguals dels segons iguals les resultants són iguals, i l'última passa és tan simple com

BC és igual a BG
AL és igual a BG
per tant AL és igual a BC

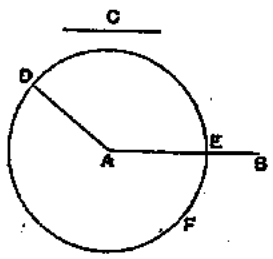
on àdhuc no tenim necessitat de recordar ni la noció comuna «si se sostreu iguals d'iguals les resultants són iguals» ni la de «coses iguals a una altra són iguals entre si». (3) La rapidesa de la construcció i de la prova estrèva en part en el fet de no representar-nos l'enunciat, a entendre directament la comanda de construcció, a dibuixar directament les figures, punts i línies, a no estudiar el triangle equilàter, els cercles, les rectes, i.e. a no comprovar element per element si s'acompleix la definició: la igualtat dels costats del triangle es dóna per descomptada, com es dóna per descomptada la igualtat dels radis, sabem directament que BG i AL són iguals, etc. (4) No es tracta que no s'estigui estudiant el dibuix: hi ha la ~~donació~~ inspecció de la línia i el punt, la construcció de figures i línies, la <u>distinció</u> entre línies «iguals», aquí i allà hi ha el reconeixement del full, del conjunt del dibuix, alguna individuació, etc., que no lleva el pensament de la llengua (sons, afecció): per això remetem a l'aprenentatge (una determinació imprecisa) -- per això també es donen les mateixes circumstàncies quan pensem sense paraules. (5) Val la pena de repetir que caldria potser separar la part constructiva i la part demostrativa: la primera modifica la natura, la segona se n'absté, per més que tant l'una com l'altra són moments o processos lògics. Però tant l'una com l'altra remeten vagament a l'hàbit, a l'aprenentatge, i ambdues entren -- talment com són -- en la racionalitat: en escoltar la comanda es determina el moment lingüístic, en construir un dibuix determinem així, sense que la construcció impliqui <u>per se</u> cap estudi de la resultant; en la demostració, finalment, seguim relacions, algun reconeixement, afecció, etc., fins i tot seguim els registres lingüístics sense que en siguin un <u>sine qua non</u> (els podem ometre), sinó que sovint són útils en la demostració ~~quan no tenim relacions a través de les quals demostrem~~. (6) No hi ha res més: l'obvietat d'una demostració resulta de l'eficàcia d'aquesta racionalitat, que envia al bon aprenentatge. L'<u>afecte</u> de molta racionalitat sembla dependre d'aquella obvietat i de la reiteració de demostracions. La demostració sembla, en aquest primer balanç, un procés habitual, comparable -- mantenint la positivitat de cada experiència -- al fet d'escriure a màquina, on no s'estudia visualment cada paraula ni els moviments individuats dels dits de les mans, sinó que hi ha un seguit visual-motor; comparable al fet de dibuixar figures per la comanda o per la decisió personal (on no cal que les figures siguin «perfectes»), al fet de caminar i de parlar, al fet de calcular en aritmètica, etc. Uns tals estats de racionalitat formarien part de la conducta humana i tindrien de racionalitat el que van tenint en el progrés determinatiu.

Tornarem a insistir sobre la demostració. Anem seguint el propi descabdellament del llibre:

Prop.I.3.

Donades dues línies rectes desiguals llevar de la més gran una línia recta igual a la menor.

Nou problema: siguin C i AB les dues línies desiguals i AB

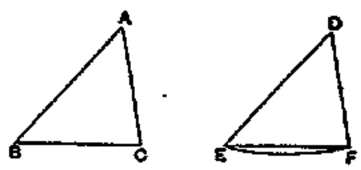


la més gran. Llavors fem un cercle de radi DA igual a C; AD és igual a AE (Def.15), però C i DA són iguals, per tant C i AE són iguals (N.C.1).

Prop.I.4.

Si els dos costats d'un triangle i l'angle que hi és contingut són iguals als dos costats i al corresponent angle d'un segon triangle, els dos triangles tenen també igual l'altre costat, els restants angles i són iguals.

és el primer teorema que apareix en els Elements. Si AB és igual a DE, AC a DF i l'angle BAC al EDF, en superposar el triangle ABC al triangle DEF coincidiria D i A, les línies AB i DE, els

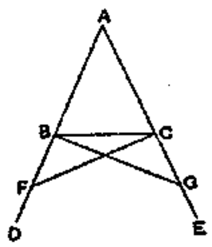


punts B i E perquè AB i DE són iguals; AC i DF perque els angles són iguals, i els punts C i F perquè AC i DF són iguals. Per tant BC coincidiria amb EF (si no coincidissin dues línies rectes tancarien un espai, cosa que és impossible), i serien iguals (N.C.4). També coincidirien els triangles i els angles, per tant serien iguals (N.C.4).

En comentar la quarta noció comuna (§ 64) vàrem fer notar que no extraiem, sembla, la igualtat de la coincidència: la igualtat de triangles, d'angles i de costats sembla aquí lògicament inspeccionada ~~donada~~; cosa que val tant per a les condicions en què es presenta la proposició com per a les conseqüències.

Prop. I.5.

En els triangles isòsceles els angles de la base són iguals i si allarguem els costats iguals, els angles que es formen sota la base són també iguals.



Sigui ABC el triangle isòsceles, BD i CE les resultants d'allargar els costats iguals (Post.2); prengui's un punt F de BD a l'atzar, fem AG igual a AF (I,3), i traci's FC i GB (Post.1). Llavors el triangle ABG és igual al triangle ACF, i ho són els angles i els costats (I,4). Llavors BF és igual a CG (N.C.3): però essent iguals FC i BG, els angles BFC i BGC i la base BC comuna, són iguals els triangles BCF i BGC, els seus angles i els seus costats (I,4). L'angle FBC és igual per tant a l'angle BCG. Però l'angle ABG era igual a l'angle ACF, i ara l'angle CBG és igual al BCF, per tant l'angle ABC és igual al ACB (N.C.3).

Tenim una part constructiva i una part demostrativa (o que prova). Deixant ara qualsevol esment als postulats i a les nocions comunes dels Elements sembla que nosaltres afirmaríem que aquesta proposició es dedueix d'Eucl.I,3 i d'Eucl.I,4 (o d'un postulat que es fes les funcions): per això nosaltres diríem que el llibre I és un sistema deductiu de proposicions.

Llavors podríem intentar de circumscriure l'ús dels mots 'demostració geomètrica' ('prova geomètrica') o 'construcció geomètrica' respecte del del mot 'deducció geomètrica': diríem per exemple que la demostració és una raó habituada que inspecciona allò donat (punts, línies, triangles, etc.); però afegiríem que aquesta mateixa racionalitat remet, en una nova relació, a allò ja tractat; per això s'afirma que les demostracions són també deduccions des de quelcom ja establert. Notem que, en aquesta accepció, els mots 'demostració geomètrica' o 'construcció geomètrica' s'usen ~~són noms~~ per a un procés racional habituat que es caracteritza per seguir passes acceptades o suficientment apreses.

Però en una segona accepció, la demostració (la prova) i la construcció palesant amb el seu exercici el procés habitual, cada passa que contenen és el cas des d'una restringida ~~afectada~~ validesa general, i per això totes les passes constructives i demostratives es tenen com a vàlides d'acord amb l'esquema «si qualsevol és tal o tal, llavors aquest és tal o tal»: les passes de la construcció i de la demostració són la conclusió o la conseqüència d'un esquema implícit. Aleshores caldria tenir un tal esquema a tall d'un procés lògic (lingüístic), que generalitza així, i col.locar-lo al costat d'altres processos lògics habituals (per exemple l'ús d'una qualsevol de les quatre primeres nocions comunes en la demostració): però tant el primer com els segons són, d'acord amb els supòsits, deduccions. Per tant el mot 'deducció' s'usaria per a processos habituals inclosos en la demostració i també per als processos habituals que remeten a les passes des dels principis (amb una accepció laxa del mot), i 'construcció' i 'demostració' s'usarien ~~serien~~ llavors ~~els noms~~ per a un procés racional habituat que duu a una certa conclusió que se cercava, i amb els trets dalt indicats.

Per tant nosaltres acceptem com a veritats aquelles conclusions que han tingut una prova i una construcció geomètrica, però alhora acceptem les construccions i les proves geomètriques perquè hem après moltes coses, i de vegades (com en totes aquestes proposicions elementals) és possible de seguir sense hàbit les veritats de la conclusió o de les passes (llavors potser seria millor parlar d'una inspecció racional). Els motius pels quals acceptem doncs les conclusions i les proposicions geomètriques són coses complexes, i remeten a la gènesi del nostre propi aprenentatge i de la història de la geometria; i aquí, com en l'aritmètica (cf. § 49) caldria distingir potser entre prova geomètrica des de l'habituació i prova en l'accepció dels motius pels quals l'acceptem.

No hi ha cap inconvenient a l'hora d'admetre que deduïm les demostracions i les construccions a partir d'allò que s'ha aconseguit abans i que aquesta relació introdueixi una causalitat. Tanmateix la relació deixa tal qual els termes, i per això les construccions i les demostracions (o proves) valen per elles mateixes com a raó constructiva i raó demostrativa ~~habitual~~ que inclou les seves pròpies deduccions; el fet que aquelles primeres deduccions valguin per a termes que mantenen relacions d'igualtat o d'equivalència més o menys reeixides (ultra de ser aquí termes que tenen a veure amb punts i línies), no lleva que es confonguin tan poc com la línia dibuixada i el blanc del paper.

També val la pena d'observar de bell nou que la igualtat entre els angles de la base d'un triangle isòsceles podria ser lògicament establerta a partir de la inspecció d'aquest triangle. Però la geometria aspira a deduir les proposicions: per això hi ha construcció i demostració. Per tant es tracta més d'una exigència que es demana el propi home (la de seguir uns tals camins constructius i demostratius) que un sine qua non de la racionalitat.

Podem comprendre doncs que prou geòmetres posteriors a Euclides hagin tendit a creure que la deducció es feia a partir de principis (les nocions comunes i els axiomes) i de les proposicions subsegüents, potser fins i tot a costa de les pròpies intencions d'Euclides o dels sistematitzadors d'una primera llista de fonaments. Llavors és el moment potser d'afegir algunes remarques sobre principis independentment de la concreta sistematització dels Elements: perquè si qualsevol relació deductiva deixa tal qual els termes, això ha de ser vàlid fins i tot per al cas que un hom reculli en principis (postulats, axiomes) allò que usa fins i tot en la primera proposició (teorema o problema), i caldria estendre per a tot el cos deductiu les notes que hem anat circumscrivint a propòsit d'aquestes proposicions dels Elements: una construcció i una demostració geomètriques són de primer activitats habituals; el fet de pautar-les d'acord amb proposicions ja treballades sembla de vegades quelcom que força més aviat l'home, que un afer sine qua non per a la racionalitat, i tots els principis admesos semblen recollir i exemplificar qüestions que cal saber, que cal fer o que cal dominar al marge de les relacions deductives entre proposicions i a més a més d'aquestes relacions, essent-ne de noves respecte de les proposicions.

En tot cas les construccions i les demostracions valen absolutament, però no deixa de ser cert que una discussió de principis és prou útil perquè cal saber i cal dominar allò que és elemental en les proposicions ~~[illegible]~~ o allò que hi és necessari, afers que mereixen sovint una discussió ad hoc.

Però les mateixes notes deixen ja entreveure que hom podria allargar indefinidament el nombre de principis de la geometria: no sols podríem considerar principis qualsevol passa apresa tipus «dues coses iguals a una tercera són iguals entre si», sinó prou coses a fer («assenyalar un punt en una recta»), qualsevol definició, prou situacions de dibuixos i maquetes o circumstàncies a trobar en la construcció de límits de figures («dues línies rectes no tanquen un espai», «dues línies rectes que es tallen ho fan per un punt», la igualtat, etc.); les geometries en podrien recollir uns quants d'acord amb allò que es cregués més rellevant[16].

§ 63. A què anomenem geometria?

1. El llibre I dels Elements constitueix com a mínim un sistema deductiu d'unes proposicions des de les altres: hem insinuat que des d'un plantejament contemporani més aviat admetríem la quarta proposició com la resultant d'una inspecció (i d'un postulat) i que fins i tot podríem cercar un sistema deductiu des d'uns principis (axiomes, postulats) a semblança (o pel cap baix a suggerència) de l'obra d'Euclides.

Però el llibre I ens permet d'observar així mateix, i precisament pel seu caràcter elemental, que un nombre apreciable de proposicions, malgrat poder estar ordenades d'un manera deductiva, palesen més aviat afers d'inspecció. Alhora l'ús de la reducció a l'absurd, que sembla implicar que acceptem ja allò que volem provar, podria ser valorat doblement: d'un banda augmentaria considerablement allò que tenim per ~~posat~~ inspeccionat, d'altra seria un mitjà par al ~~de~~ revestiment deductiu d'una ~~de la~~ prova en el seu camí demostatiu fins a l'absurd. Remarquem que no es tracta tant d'una crítica de l'ordenació dels Elements com de la cerca de la caracterització de la geometria i de la seva comesa lògica: la reducció a l'absurd és prou acceptada avui dia, i per això els Elements continuen essent un dels llibres més rellevants per a la reflexió dels fonaments dels mètodes geomètrics i de la natura d'aquesta disciplina.

En d'altres paraules, i com ja insinuàrem, una sistematització deductiva perfecta no és cap ideal perquè és un impossible[17], i cal

---

[16] La simplificació de principis té un dels seus punts de suport en la creença que uns principis són equivalents a uns altres: per exemple que el cinquè postulat d'Euclides és equivalent al postulat que per un punt exterior a una recta sols hi ha una paral.lela, o a qualsevol dels múltiples postulats alternatius.

[17] Com el llibre I dels Elements exemplifica per al seu cas la seva ordenació de proposicions no implica pas que tot el que anem treballant en cada demostració pugui ser deduït a partir d'altres proposicions (i si voleu: dels seus principis): és clar que nosaltres podríem anar introduint postulats a ~~mida~~ mesura que anessin apareguent novetats, però l'afer seria un incessant estira i arronsa entre el progrés de la disciplina i la formulació de principis i del sistema deductiu: per això una accentuació

tenir-la com un mitjà d'ordenació -- i en qualsevol cas els principis s'incardinen en aquestes necessitats: els Elements no sembla que hagin fet una altra cosa, malgrat que des d'avui puguem exigir més postulats, no admetem algunes proposicions per ser ja postulats, i nosaltres afegim encara que la reducció a l'absurd revesteix en llenguatge deductiu afers d'inspecció, malgrat les conviccions d'un grec euclidià o d'un contemporani. Però som tot plegat on érem: que la construcció i la demostració són racionalitats habituals que valen d'una manera absoluta i que qualsevol ordenació deductiva apunta casos ja admesos (o a admetre) que entren en aquella raó i per això podem forçar la marxa expositiva d'acord amb una ordenació deductiva.

Alhora la demostració geomètrica (la prova geomètrica) i la construcció geomètrica, repetim-ho, es caracteritzarien per ser processos habituals que parteixen de coses acceptades o apreses i es descabdellen a través de coses acceptades o apreses, i això independentment dels darrers detalls de l'establiment dels principis; es pot entreveure que l'afany d'axiomatizar correctament la geometria prové del propi tarannà de construcció i de la demostració en la ~~mida~~ mesura que parteixen i es descabdellen mitjançant passes acceptades o apreses, i que, en una accepció, la demostració (o la prova) i la construcció esdevenen independents d'una axiomatització (un treball posterior)[18].

2. La revisió del nombre de principis per a axiomatitzar la geometria essent ara una qüestió que cau fora dels nostres propòsits, l'ús instrumental d'Elements permet si més no d'indicar ~~ara~~ l'objecte de la geometria euclidiana, que sembla que no es pot considerar al marge de la pròpia activitat geomètrica.

---

excessiva de l'axiomatització pot deixar eixorca una disciplina, amb el ben entès que sempre s'aconsegueix a posteriori de qualsevol progrés. En d'altres paraules: qualsevol sistema deductiu és una presentació de la disciplina i no té necessitat d'excloure que allò que es va deduint no pugui contenir novetats significatives respecte d'allò ja tractat; el fet que hi hagi sistemes deductius més perfectes té sens dubte el seu mèrit com en tindria el sistema que fos perfecte: però cal no oblidar que la demostració i la construcció valen d'una manera absoluta, i que l'avenç en el domini de les relacions reals és tan important com un bon sistema deductiu.

aquí

[18] Notem que el mot 'conseqüència' tindria dos usos: de primer serviria per a la passa final d'una raó habituada («essent la línia AB igual a la CD i la EF igual a la CD, per conseqüent la línia AB és igual a la EF»); però també qualsevol passa lògica que és un altre moment respecte dels principis (tant en una accepció estricta o considerant també principis d'altres proposicions), per tant que se'n dedueix, és també la seva conseqüència: qualsevol moment d'una raó habituada esdevindria una conseqüència dels principis.

Per exemple és fàcil d'adonar-se que la geometria euclidiana sembla la resultant de l'activitat de l'home en múltiples accepcions: una aportació primera seria la de construir línies i marcar punts, per tant la d'una manipulació natural, en els camps i en les coses, i la d'un estudi de llurs relacions tot incloent-hi les superfícies i els sòlids (aquestes coses) que hi estan limitats.

La reproducció de línies i de punts a escala dels papers perllongaria aquella activitat, unes tals línies serien models en l'accepció que sembla haver-hi una equivalència amb les d'un camp de conreu, per exemple, i perquè estudiem les relacions en les reproduccions. La construcció de línies i de punts -- coses -- sembla donar-nos l'oportunitat de circumscriure trossos reals, que tenen el seu propi fonament lògic, i llavors estudiem les relacions entre línies i punts i aquells trossos reals, de tal manera que impliquem coses que no són línies i punts en les nostres construccions de línies i de punts -- i a l'inrevés: bastim també línies i punts a partir de consideracions de coses que no ho són.

Fixem-nos que l'important paper de les línies i dels punts s'encaminaria a trobar relacions d'igualtat (independentment del grau d'inspecció) i d'equivalència (on la igualtat tingués un paper important) en ~~elles~~ mateixes, entre ~~elles~~, en les coses que delimiten o entre ~~elles~~. Sembla doncs un treball des d'una selecció lògica amb uns propòsits, i per això seria un simplificació dels casos a trobar en la natura o en una reproducció; però no és un estudi no ~~real~~ natural: el quadrat és blanc (quan el dibuixo en un paper), verd (damunt del prat), etc.; el fet de parlar d'un quadrat sense esmentar-ne el color, el tacte, etc., no lleva que en posseeixi, ~~menys~~ car és un individu.

Per això podríem tenir la geometria dels inicis com un exercici lògic ~~posicional~~ inspector-habitual; notem que ho faríem des d'una selecció, l'important paper de la igualtat, el fet que, com a geometria, no li interessaria la diferència i la relació qualitativa (entre aquest blanc i el seu tacte o entre aquest blanc i aquest altre blanc) i la circumstància que bascula entre la inspecció i la conducta apresa: mentre totes les coses podrien rebre un estudi des de paràmetres geomètrics, o ~~dels~~ des seus models geomètrics, com sigui que arreu hi ha equivalència, ~~-- o, és clar, des de les reproduccions de les unes i dels altres --~~ no deixaria de ser cert que aquesta racionalitat geomètrica és la racionalitat de la natura o dels seus equivalents reproductius.

Certament, i a mesura que augmenta el criticisme, no es consideraria que la línia pugui tenir un gruix considerable, i fins i tot se suggeriria lingüísticament que no té amplada i gruix, però una tal cosa seria més un escrúpol crític que una qüestió de fet: a nosaltres, no ens importaria la quantitat en amplada d'allò que es discrimina en la superfície del paper, etc.

Alhora aquest escrúpol menaria a idealitzar la geometria d'acord amb tres supòsits: (1) que els punts serien sense parts, les línies sense amplada, les superfícies sense gruix, i per tant les entitats geomètriques no tindrien existència natural, sinó que esdevindrien ens de raó; (2) que projectem en l'estudi analític i detallat (trobant sovint imperfeccions i defectes) la valoració de la conducta apresa i confiada de cada dia; (3) que la reiteració dels esquemes numèrics sobre una mateixa magnitud permetent «un compte (i una discriminació ~~formal~~ abstracta) infinit», l'afer reblaria la necessitat de (1) i corroboraria al seu nivell l'~~aposicionalitat~~ anaturalitat de tots els ens geomètrics.

Però (1) essent un contingut lògic negatiu, (2) recaient en allò que el motiva i (3) servint-nos sols com un mitjà ~~formal~~ abstracte del qual mai no podrem gaudir d'una altra manera que com a pensament lingüístic d'una negació a partir de reiteracions que són sols ~~mesures~~ esquemes numèriques, la geometria, fins i tot animada per idealitats i fent ús de les sèries numèriques, ~~formals~~, no podria orientar-se i descabdellar-se més que seguint els casos possibles per a l'home. I sens dubte el treball reiterat de construcció de línies i de punts i de demostració de relacions ha precedit a qualsevol assaig de presentació deductiva; llavors aquesta afegeix la nova marca de l'activitat de l'home en voler pautar les passes de la demostració i de la construcció.

3. La geometria d'un espai que no té com a mínim més que tres dimensions estudiaria línies i punts fets per l'home o discriminitats en la natura, i ponderaria les seves relacions; després hi inclouria les relacions amb les coses que línies i punts discriminen, i com a activitat reiterada tot això faria un cert embalum, amb l'afegit que les definicions negatives de punt, de línia i de superfície, el contrast entre la valoració quotidiana i els defectes de les nostres construccions, i la possibilitat de reiterar «indefinidament» l'anàlisi numèrica, afectarien d'~~irrealitat~~ anaturalitat un tal estudi, i faria prendre tota mena de precaucions tant en el propi estudi com en les definicions dels ens geomètrics resultants, de tal manera que l'esperit d'estar treballant amb afers no naturals romandria arreu gràcies precisament a les nostres mateixes precaucions nocionals i al conseqüent escrúpol en les nostres consideracions que inspeccionen gràfics i maquetes.

Tanmateix en una primera accepció aquesta geometria se separaria de la natura sols pels equivalents reproductius; la natura es diria 'geomètrica' perquè la pensem des de línies i des de punts que ens possibiliten relacions d'igualtat i d'equivalència, però no perquè hi superposéssim quelcom: hom individua el cos d'un home, però podria considerar les relacions de simetria respecte de les seves parts mitjanes. Una tal racionalitat geomètrica revelaria l'espontaneïtat de la reflexió, però no hi hauria d'altra anaturalitat ~~que la reproductiva~~. Per dir-ho així: no seria l'home qui superposaria una tal geometria a la natura, sinó que fóra la natura la que es deixaria pensar geomètricament; l'home sols decidiria a partir de quina part natural estudia la natura, i per això, pròpiament parlant, aquesta geometria esdevindria un altre nom per a la natura en la ~~mida~~ mesura que se la pensés des d'unes parts definides, i la <u>disciplina</u> geomètrica fóra llavors la dels nostres models i maquetes, equivalents amb la resta de la geometria. En qualsevol cas la geometria convida pels seus orígens a un genuí exercici que estudia la lògica de la natura (~~o d'un~~ sinònim equivalent reproductiu); un tal exercici no seria <u>la</u> lògica de la natura perquè, per més que no la podria evitar, no li interessaria la relació qualitativa.

En una segona accepció la geometria que coneixem (començant per la grega) és una raó habituada que treballa així des dels primers moments: per tant no és <u>un</u> estudi de la natura (sinònim o el d'un equivalent~~s~~ reproductiu~~s~~) en la ~~mida~~ mesura que hi ha una habituació (una obvietat). Però alhora és cert també que la racionalització d'aquestes obvietats la confirmaria com a lògica natural de les coses, dels punt i de les línies, i que faria reintroduir el nombre, no pas com un fet primàricament ageomètric i anatural, sinó com la resultants de l'activitat geomètrica i natural de l'home, que ha de menester per això de nous noms abans que l'estudi aritmètic sembli aliè a aquests afers gràcies a nous hàbits, a les reiteracions sobre si mateix i a la necessitat (tenim un abast lògic finit) de parar atenció al propi càlcul numèric i a les seves igualtats.

I en una tercera accepció certament la geometria no seria un fet natural en la ~~mida~~ mesura que no creiem que hi puguem trobar punts, línies i superfícies com cal, que les coses de la natura, inclosos els nostres dibuixos i les nostres maquetes, són incapaços de reflectir, no sols la perfecció d'una igualtat, sinó fins i tot allò que entenem per ens geomètrics, encara que hàgim d'admetre que no podríem descabdellar-la com a disciplina sense el suport de dibuixos i de maquetes. En efecte el nostre equipatge nocional i l'ús de nombres rectifica constantment la necessitat d'aquest suport, i de fet les consideracions numèriques i llur reiteració ens fan perdre de seguida, en algun sentit, la ~~posicionalitat~~ inspecció.

D'altra banda -- i per damunt d'aquesta tercera accepció -- que l'objecte originari de la geometria es trobés en l'estudi de línies i de punts, a partir dels quals estudiem les coses, no llevaria, no sols la raó habituada que s'accepta per l'aprenentatge (i perquè en qualsevol moment es podria comprovar), sinó tampoc l'ús lingüístic d'allò que ja hem après i les pròpies recreacions a partir dels aprenentatges i dels usos lingüístics; així com veiérem que l'aritmètica es recrea sobre si mateixa a partir dels aprenentatges que hem fet ~~més o menys posicionalment~~, res no força, sembla, que hi hagi quelcom realment en la geometria: el domini de les relacions dels cossos i del llenguatge en serien les condicions.

4. Versemblantment comprendríem que la idealització de punts. de línies i de superfícies, la projecció en l'estudi analític de la valoració de la conducta apresa i confiada de cada dia, els comportaments dels hàbits racionals constructius i demostratius i del càlcul numèric, el propi domini del mot 'espai' (per tant amb les seves afeccions), etc., puguin suggerir un espai geomètric (euclidià) pur que aniria rebent una colla d'anotacions lingüístiques (homogeni, continu, indefinit, etc.): possiblement es tracta d'un espai «idealitzat» en l'accepció que ho serien els ens des dels quals se'l delimitarià (punts, línies, superfícies), en l'accepció que els comportaments hi conrearien llurs característiques afeccions, que les anotacions lingüístiques hi impressionarien llur contingut lògic lingüístic (noti's que 'homogeni','continu', serien mots l'ús dels quals podria ser ostensiu, al marge doncs d'uns tals espais geomètrics purs; que l'ús d''indefinit' seria sempre lingüístic, etc.), etc. L'espai geomètric pur doncs sembla en principi un mer fet lingüístic resultant d'uns comportaments: l'oposició entre l'espai quotidià i el geomètric (euclidià) pur esdevindria potser la conseqüència d'oposar l'espai de les coses (i, en conjunt, natural) i fets lingüístics i comportamentals. és clar que una tal oposició fóra, si es vol, conceptual i (en part) també orientativa de la pròpia activitat geomètrica, però de cap de les maneres no comportaria que calgués explicar una tal activitat sols per aquelles idealitats: llavors hauria estat impossible el descabdellament de la geometria euclidiana.

Però la introducció d'un espai geomètric pur (euclidià) enterboleix segurament el propi estudi que un àmbit filosòfic pot fer de la geometria; perquè l'oposició entre l'espai quotidià i un espai geomètric pur (eunclidià) sembla, diem, l'oposició entre allò que podem inspeccionar si més no parcialment i allò que és mera idealitat lingüística, i no pas l'oposició entre l'espai de cada dia i l'espai del propi exercici geomètric euclidià, car un espai idealitzat de cap a cap és quelcom que s'analitza en so i afecció, i faria de fet impossible aquell exercici; en efecte la geometria sembla de primer un estudi natural des de línies i punts abans de rebre les rectificacions idealitzadores d'aquests últims o les conseqüències dels tarannàs comportamentals, mentre la geometria euclidiana ha de ser possible; això sembla implicar que l'espai geomètric (euclidià) i l'espai quotidià són el mateix en l'exercici geomètric quan atenem que partim de l'espai de cada dia i que la geometria idealitza punts, línies, superfícies, o que rep els corresponents impactes comportamentals, sense que tot això meni per se a una nova concepció espacial en tant que exercici geomètric. En d'altres paraules: l'espai geomètric pur (euclidià) sembla una passa més conceptual, d'acord amb d'altres idealitzacions i comportaments, que tindria també (en part) una funció orientativa per a l'activitat geomètrica euclidiana, sense que pogués substituir en l'exercici geomètric euclidià l'orientació lliurada per l'espai quotidià; per això hi ha una ambigüitat en parlar d'espai geomètric: perquè podem referir-nos a aquells trets que són els de l'espai quotidià o a aquells que corresponen a un ens

§ 64. Cap a nous horitzons.

L'esment dels Elements ha permès de considerar una mica els principis (§§ 52-61), el procés de la demostració i què cal entendre per deducció des de principis (§ 62); s'ha insinuat finalment (§ 63) l'objecte de la geometria. Ara toca encetar d'una manera puntual alguna geometria no-euclidiana, tal i com ho prometérem (§ 62), per on sembla que es podrà concloure convincentment que sols el domini de la geometria euclidiana ha pogut dur a la investigació de les no-euclidianes, com la història i l'estudi de cada individu testimoniarien.

Adverteixi's que l'interès del present apartat rau en el fet que s'hi introdueixen noves estipulacions lingüístiques impossibles d'inspeccionar en els nostres dibuixos i en les nostres maquetes, però d'índole diferent de les del punt, de la línia, etc., que «idealitzaven» la geometria en tots els seus descabdellaments, afer reblat per les consideracions numèriques, i alhora -- pel motiu de la seva irrepresentació -- no merament comparables amb l'ús del llenguatge com a registre. Es tracta doncs d'una originalitat lingüística del tot rellevant, que té, és clar, el rerafons que hem après la geometria euclidiana amb tots els seus possibles nivells de lectura o accepcions, que ja dominem els seus afers, i en la qual usem prou mers registres (al cap i a la fi usem així el llenguatge més quotidià), la pensem així, sense cap mena de problema.

Sabem ja que els continguts (lingüístics) lògics entren tal qual en qualsevol racionalitat; alhora aquelles noves estipulacions són per a discursos geomètrics: d'aquí que hauríem de veure amb un pèl més de detall les repercussions d'aquell contingut (lingüístic) lògic en l'activitat geomètrica, i ho farem breument ara amb unes notes a la geometria de Lobatxevski.

En efecte algun text de la geometria de Lobatxevski o, millor, els inicis de la seva geometria tal i com l'exposa als Nous rudiments de la geometria amb una teoria completa de les línies paral.leles (apareguts al llarg dels anys 1835-38 com a articles) -- potser la seva obra sistemàtica sobre el tema més explícita -- serà prou útil a l'efecte de treballar in situ allò que hi ha de nou en una tal racionalitat, que no comença a aparèixer fins al norantè paràgraf en els Nous rudiments: abans repassa i recull com a vàlides per a la geometria en general tota una colla de conceptes (el punt, la línia, el pla, etc.) i de proposicions, alguna de les quals valdria la pena de recordar, per exemple les següents: per un punt exterior hi ha sols una vertical que caigui sobre una recta, mentre que les altres rectes que la tallen i que passen per aquell punt, respecte al cantó de la vertical, hi formen un angle agut (per tant dues línies rectes que són perpendiculars a una tercera no es tallen l'una a l'altra) (Nous rudiments § 48); en un triangle hi pot haver un angle recte o obtús, mentre que els altres dos, en aquest cas, són aguts (§ 49); un triangle equilàter és també equiangular, i a l'inrevés (tots els angles són aguts)(§ 50); en un triangle equilàter la vertical des de l'angle agut sobre la base biseca l'angle i la base (§ 52); l'angle exterior que s'origina pel perllongament d'un dels costats d'un triangle és més gran que qualsevol dels dos angles interns que no li són adjacents (§ 53); en un triangle el costat més gran subtendeix l'angle més gran, i a l'inrevés (§ 54), i la suma de dos dels costats és més gran que el tercer (§ 55); els triangles són congruents quan tenen dos costats iguals i l'angle que contenen, o quan tenen un costat igual i els dos angles que circumscriu (§ 81); dos triangles rectilinis són congruents quan tenen: els tres costats iguals (§ 82); dos costats iguals i igual el més gran dels angles que subtendeixen (§ 84); dos costats iguals i igual el més petit dels angles que subtendeixen, en el supòsit que els dos triangles o són acutangles o són obtusangles (§ 85); són així mateix congruents els rectilinis, si tenen un costat igual, un dels angles que circumscriu igual i també igual l'angle que el costat subtendeix (§ 87). Pels exemples s'observarà que prou de les proposicions contingudes en el llibre I dels Elements continuen vàlides; cal doncs introduir-nos de ple en la proposició norantena, que fa[19]:

« § 90

En un triangle rectilini la suma de tots els angles no pot ser més gran que π.

Anomenem S la suma de tots els angles del triangle. No essent iguals els angles, suposem que A és el més petit o, en general, no més gran que els altres dos. Hem vist (§ 53) que qualsevol triangle ABC (Fig.47) es pot transformar en un altre AFC, en el qual la suma de tots els angles és la mateixa, mentre que la suma ABC+ACB de dos qualssevol del primer triangle constitueixen en el nou triangle l'angle únic ACF, i per consegüent el tercer angle BAC s'hi transforma de tal manera que es divideix en dos: AFC i FAC.

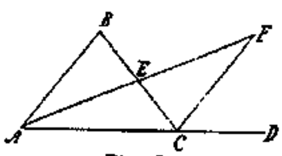


Fig. 47.

[19] Traduïm de l'important text de F.Engel (cf.bibliografia), pàgs.161-162.

Sigui doncs ABC el triangle en què la suma de tots els angles és S, i no sigui l'angle BAC=A més gran que els altres dos. En el nou triangle AFC la suma de tots els angles és de nou S, i un dels angles en els punts A, F ha de ser $\leq 1/2$. Tot i això tenim en el triangle ACF

$$\begin{aligned} S &= \angle ACF + \angle FAC + \angle AFC \\ &= \pi - \angle FCD + A \\ &< \pi + A. \end{aligned}$$

Mentre bisequem el costat oposat a l'angle $\leq 1/2$ A en l'últim triangle, i prosseguim transformant sempre, tal com hem fet, un triangle en un altre, ens caldrà en general concloure que

$$S < \pi + 2^{-n} .A$$

on el nombre enter positiu n pot ser tan gran com es vulgui, i per tant 2^{-n} A tan petit com es vulgui.

Segons això no podem admetre que $S-\pi$ sigui un qualsevol angle positiu, sinó que ens cal suposar merament o que $S=\pi$ o que $S<\pi$.

Fou Legendre (Éléments de Géométrie) qui provà primerament aquesta proposició, mentre que feu observ abans que en un triangle /ar un costat creix alhora amb l'angle oposat. En el triangle ABC (Fig.84) sigui el costat $BC \geq AB$, per conseqüent ~~aquest~~ agut l'angle →q BCA. Donem al costat BC una nova posició BD, mentre fem més petit

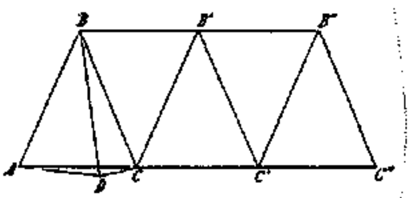


Fig. 84.

l'angle ABC. S'originen aixi dos triangles: l'isòsceles BCD amb l'angle agut BDC i el triangle BDA amb l'angle agut BDA oposat al costat AB, per on la suma dels angles ADB i BDC és menor que π. Això significa que els punts B i D es troben en costats oposats de la recta AC, la qual d'aquesta manera constitueix amb AD i CD un triangle ADC on l'angle ACD = BDC− BCA < ADC, per tant el costat AD<AC (§ 54).

En el triangle ABC anomenem ara b i c els costats oposats als angles B i C. Perllonguem el costat b segons la direcció del punt C i portem continuament b sobre el perllongament, mentre que alhora movem el triangle ABC en la direcció de A cap a C, de tal manera que en tots els triangles congruents ABC, CB'C', C'B''C'',..., els costats AC = CC' = C'C'' =,..., així com AB = CB' = C'B''=,..., els costats BC = B'C' = B''C'' =,..., els angles BAC = B'CC' = B''C'C'' =,..., BCA = B'C'C = B''C''C' =,... Mentre unim les puntes de tos aquests triangles seguint la sèrie per mitjà de les línies BB', B'B'', ..., obtenim així els triangles: BCB', B'C'B'', ..., en els quals els angles en els punts C, C',... han de ser més petits que ABC, quan pressuposem que la suma dels tres angles en el triangle

ABC és més gran que π. Llavors els costats BB', B'B'',... són iguals entre ells i cadascun <b. Designem el costat BB' amb la lletra a i amb la lletra n el nombre d'aquests costats, llavors haurem d'obtenir

$$2c > n(b - a)$$

cosa que no és possible per a un qualsevol nombre enter positiu n. D'això se segueix que l'angle exterior que s'origina pel perllongament d'un costat d'un triangle pot ser igual o més gran que la suma dels dos angles interns que no són el seu adjacent».

Observi's que el paràgraf 53 que esmenta reprodueix Eucl.I,16 (anotem que aquesta proposició no és universalment vàlida en la hipòtesi riemanniana de l'espai); també que

$$S = \pi - \angle FCD + A$$

perquè

$$\angle ACF = \angle ACB + \angle CBA.$$

Però cal més aviat accentuar com a rellevant les conclusions que s'extreuen: si en geometria euclidiana

$$FCD = A, \text{ i per tant } S = \pi$$

Lobatxevski afirma que «segons això no podem admetre que $S - \pi$ sigui un qualsevol angle positiu, sinó que ens cal suposar merament o que $S = \pi$ o que $S < \pi$».

Tot el número noranta té material de Legendre: Lobatxevski, en la introducció dels Nous rudiments, havia ja tingut per incorrecta una prova del matemàtic francès, que reprodueix, segons la qual la suma dels angles d'un triangle són dos rectes; però la prova de Legendre no era per reducció a l'absurd[20], mentre que el paràgraf que estudiem en recull una, d'aquest matemàtic, que sí que ho és, i justament sembla que l'esculli per a renunciar a la hipòtesi que la suma dels angles d'un triangle pugui ser més gran que dos rectes. En efecte, tenint

$$S < \pi + 2^{-n}.A$$

[20]Aquesta prova es pot trobar a molts llocs. Un resum faria: sigui ABC un triangle donat, AB el costat més gran (i base) i BC el costat més petit; traci's des del vèrtex A una recta AC' igual a AB, que passi pel punt mitjà D de CB; allargui's AB fins a B' fent que AB' sigui dues vegades AD. Llavors la suma dels angles del triangle format AC'B' és igual a la dels angles del triangle ABC. I l'angle C'AB' és més petit que la meitat de l'angle CAB. Llavors es repeteix reiteradament tota la construcció per al nou triangle AC'B': fent-se els angles que la base circumscriu cada vegada més petits, l'angle que li és oposat tendeix a ser pla.

sembla que, posats a no acceptar sols que (en el límit) $S=\pi$, tant hi puguem admetre $S<\pi$ com $S>\pi$[21]. Es tracta que l'estudiós, que domina ja l'art geomètric i, en conjunt, les disciplines matemàtiques, decideix d'establir que, en lloc d'acceptar solament que la suma dels angles d'un triangle fan dos rectes, acceptarà que també poden fer menys de dos rectes. Cal comprendre això com l'afirmació d'una pauta de conducta lingüístico-habitual a partir de l'aprenentatge de la geometria euclidiana, com ara mateix tindrem ocasió d'anar-ho comprovant[22]:

«§ 91

Quan en un triangle la suma de tots els angles val π, la suma val també π en qualsevol altre triangle.

En el triangle ABC (Fig.85) pressuposem aguts els angles A i C i la suma de tots igual a π. Des del punt B fem caure la perpendicular p al costat AC, que d'aquesta manera es divideix en dues parts q i r, mentre que el propi triangle es divideix en dos triangles rectangles; l'un amb els catets p i q, en el qual fem la suma dels tres angles igual a $\pi-\alpha$, l'altre amb els catets p i r, en el qual establim la suma igual a $\pi-\beta$. En el triangle donat ABC

---

[21]Dins de l'euclidianisme hom demostra, és clar, que la suma dels angles d'un triangle fa dos rectes (per tant no fa més de dos rectes o menys), i en la figura 47 AB i CF són paral.leles. Com veurem més avall tant en les presentacions que no segueixen l'ordre dels Elements com en el no-euclidianisme sembla que s'ha de tendir a una colla d'assumpcions (el valor de la suma dels angles dels triangles, el postulat de les paral.leles, etc.) i que en l'exposició dels sistemes hi hagi ordres diversos de qüestions que s'encreuen: hem esmentat, per exemple, que el propi Legendre oferí una prova directa (tot i que envia al límit) per a $S=\pi$, mentre que la citada de Lobatxevski és per reducció a l'absurd; però amb independència del paràgraf del matemàtic rus, l'acceptació d'Eucl.I,16 comporta la d'Eucl.I,17 per part de Legendre i de Lobatxevski, que el segueix, i troba el fet paradoxal que l'assumpció de $S>\pi$ manté la possibilitat que la suma de dos angles sigui més gran que π (cf.Hilbert, Grundlagen der Geometrie, pàgs.41-42). Per dir-ho així: l'abandó del camí «normal» té per conseqüència que assumim proposicions sense una escaient inspecció lògica, tot plegat pel fet que ja hem après, com direm de seguida, per exemple que no podem afirmar quelcom i negar-ho alhora. Noti's que, donada l'argumentació de Lobatxevski, la suggerència de $S>\pi$ no esdevé cap insensatesa, per més que la nostra exposició no es recolza en aquest punt, sinó en el fet que el valor $S<\pi$ és aquí una estipulació.

[22]Ibidem, pàgs.162-165.

la suma de tots els angles ha de ser igual a $\pi-\alpha-\beta = \pi$, però essent

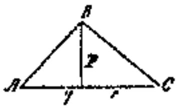


Fig. 85.

impossible de pressuposar α i β com a nombres negatius, llavors $\alpha = \beta = 0$. Això significa que en cadascun dels dos triangles rectangles la suma dels tres angles és igual a π i la suma dels dos angles aguts és igual a $1/2\ \pi$.

Afegim a un triangle amb catets p i q un altre d'igual, hipotenusa sobre hipotenusa i talment que els costats iguals no es trobin, sinó que s'oposin els uns als altres: obtenim així un quadrilàter amb angles rectes (Fig.86), que hom anomena rectangle per aquesta raó. Amb n rectangles d'aquesta mena i posant els

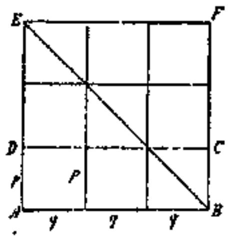


Fig. 86.

costats p uns arran dels altres, constituïm un nou rectangle ABCD, en el qual el costat AD = BC = p i AB = DC = nq. De manera semblant aconseguim un rectangle ABFE, en qual tenim AB = EF = nq i AE = BF = mp, m i n essent nombres enters qualssevol. Amb la recta BE dividim el rectangle ABFE en dos triangles rectangles congruents ABE i BEF (§81), en els quals la suma dels tres angles és la mateixa, per consegüent igual a π en cadascuna.

Qualsevol que sigui el triangle ABC (Fig.87) amb un angle recte BAC que tinguem, sempre podem prendre uns nombres enterns n i m tals que el catet AB<m.p i AC<n.q. Quan doncs allarguem AB i AC en la direcció dels punts B i C i fem AD=mp , AE=nq, obtenim un

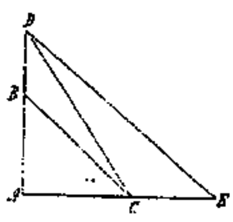


Fig. 87.

triangle DAE en el qual la suma de tots els angles és π i en l'interior del qual està contingut el triangle ABC, de tal manera que dividim el triangle ADE en tres: DCE, BCD i ABC traçant la recta DC. Si suposem en aquests darrers triangles que la suma dels angles és igual a $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$, en el triangle ADE la suma ha de resultar igual a $\pi-\alpha-\beta-\gamma = \pi$, quan, després d'haver sumat tots els angles, es lleva els 2π dels punts B i C. Però α, β i γ no poden ser negatius, i per consegüent tenim que $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$. Havent-nos convençut que $\gamma=0$, hem provat alhora que en qualsevol triangle rectangle la suma dels tres angles és igual a π; però com en general qualsevol triangle pot dividir-se en dos triangles rectangles, cal que la suma dels tres angles de qualsevol triangle sigui igual a π.

Aquesta proposició, també l'ha provada Legendre (Éléments de Géométrie), però nosaltres admetem a més a més, en la ~~[illegible]~~ mesura que ampliem la geometria, tant l'un com l'altre dels dos supòsits que fins al moment són encara possibles. La geometria habitual pren, en concordança amb els mesuraments reals dels triangles, la suma dels tres angles igual a dos rectes. Com a fonament per a la geometria imaginària, que sols podem concebre en el nostre enteniment, ens serveix l'altre supòsit, això és, que en qualsevol triangle la suma dels tres angles ha de ser més petita que dos rectes. En aquest cas la suma esmentada creix tan aviat com els costats del triangle ~~disminueixin~~; es fan més petits; independentment, per exemple, de com sigui l'angle

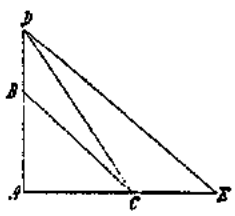


Fig. 87.

BAC (Fig.87), si en el triangle ABC la suma de tots els tres angles és igual a $\pi-\alpha$, en el triangle BCD igual a $\pi-\beta$, i en el triangle DCE igual a $\pi-\gamma$, la trobem igual a $\pi-\alpha-\beta-\gamma$ en el triangle ADE.

Per contra quan prenem en tots els triangles la suma dels tres angles igual a π, llavors la suma dels angles en un polígon de sols un contorn i de n costats és igual a $(n-2)\pi$, essent $n-2$ el nombre més petit de triangles en què el polígon donat es divideix (§ 69). Això se segueix també de l'expressió de la superfície d'un triangle esfèric (§ 69), que hom ha de considerar llavors com a nul.la.

§ 92

Els triangles rectilinis són congruents quan em aquests els tres angles són iguals i pressuposem llur suma ~~sem~~ diferent de π.

En els triangles rectilinis ABC i A'B'C' (Fig.88) sigui l'angle A=A', B=B', C=C' i A+B+C < π. Si fem descansar el triangle A'B'C', superposant els costats dels angles iguals A, A', sobre el triangle ABC, llavors cap dels dos triangles pot estar contingut en l'altre (§ 91). Però si l'un sols sobresurt de l'altre en una part, quan per exemple el punt B' en la cara AB cau entre els punts extrems A i B, mentre el punt C' passa a trobar-se fora del triangle ABC en el perllongament de AC, el costat B'C' produeix,

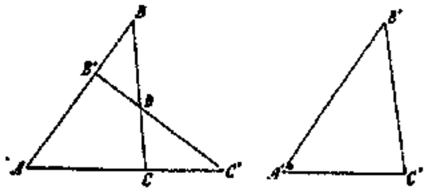


Fig. 38.

tallant BC en el punt D, dos triangles BDB' i CDC', en els quals la suma dels tres angles val π + ∟BDB', cosa que és impossible (§90).

En el supòsit que la suma dels tres angles és igual a π, els triangles poden perfectament no ser congruents, malgrat que tinguin els tres angles iguals, perquè això pròpiament sols significa la igualtat de dos angles, mentre que el costat roman arbitrari (§81)».

El punt primer del paràgraf 91 és una reducció a l'absurd, el segon hi torna d'una manera directa i clara (~~possibilitat d'un cercle viciós:~~ pel cap baix que el joc de dos triangles rectangles iguals faci un rectangle sembla pressuposar que la suma dels angles de cada triangles és de dos rectes)[23] i el tercer potser prepara el pas a la geometria imaginària per mitjà d'un nova reducció a l'absurd (la generalització que la suma dels angles de qualsevol triangle és dos rectes podria provenir segurament de la nostra experiència reiterada); sense reducció a l'absurd, tenim directament que la suma de tots els angles dels triangles DCE, BCD i ABC fa

$$\llcorner DAE + \llcorner AED + \llcorner EDA + 2\pi$$

per això el quart punt, mentre havia estat preparat pel tercer, el ~~el~~ segueix estrictament, però ara per a la pauta que δ<π, sembla guardar per a l'estipulació la circumstància que la suma dels angles d'un triangle sobrepassa amb 2π la suma de tots els angles d'aquells triangles assenyalats que comprèn: usem la nostra convenció a allò que hem après, i d'ací la resultant. Es tracta de continuar euclidianament, això és, a través de la inspecció ~~[illegible]~~ o/i amb l'aprenentatge fet, el raonament geomètric a partir d'una

[23] És curiós de veure com Hilbert (Grundlagen der Geometrie, pags.42-43) introdueix el paral.lelisme euclidià a partir dels triangles: pressuposa donat un paral.lelogram, els dos costats oposats del qual són iguals i perpendiculars a un tercer costat: es tracta ja d'allò que hem considerat abans com a paral.leles; Hilbert, és clar, les defineix a la manera dels Elements (cf.pàg.28).

estipulació lingüística (que alhora ha estat possible pel nostre domini geomètrico-matemàtic)[29]. Un fet veritablement curiós: mentre Lobatxevski ens diu que sols podem concebre una tal geometria, l'experiència personal assenyala que alhora hom s'aferra fins i tot més als gràfics (hi ha un seguiment ~~posicional~~ inspector) -- tendeix a no confiar-se tant en l'aprenentatge -- tot estipulant alhora la conducta lingüística (que prové d'una habituació i del domini d'allò que és geomètric). Som davant d'un «aviam què passa si repassem la geometria (euclidiana) tot estipulant que la suma dels angles d'un triangle és menor ~~de~~ que dos rectes en lloc d'igual a dos rectes», i per això l'hàbit que pressuposa el pensament lingüístic no és gens incompatible ni amb els processos apresos i ~~abstrets~~ adequats en ~~general~~ contrast ni amb un seguiment lògic ad hoc dels gràfics -- necessari en la ~~mida~~ mesura que no hem de deixar passar l'assumpció que ara no acceptem -- i, cal reconèixer-ho, en la major part de demostracions geomètriques (euclidianes) el fet que la suma dels angles faci dos rectes no és res més que una pauta lingüística dominada.

Fins aquí hem pogut parlar d'abstracció en el sentit de generalització, de domini lingüístic, d'ús lingüístic de quelcom que remetria a algun aprenentatge. Ara podem afegir-hi una nova accepció, perquè en establir pautes lingüístiques que van contra la lògica ~~posicional~~ inspectora -- una possibilitat de fet que segurament no té més explicació -- cal reconèixer sense embuts que l'estipulació és irreco~~neixible~~gnoscible en les nostres representacions o en els

---

[29]En tant que la formulació dels postulats d'una geometria euclidiana està compromesa en construccions lingüístiques i que la mateixa activitat humana en pensa d'altres, les paraules de Poincaré són prou entenedores: «els axiomes geomètrics no són doncs ni judicis sintètics a priori ni fets experimentals. Són convencions; la nostra tria entre totes les convencions possibles està guiada per fets experimentals; però roman lliure i no té més límit que la necessitat d'evitar qualsevol contradicció. És així com els postulats poden restar rigurosament vertaders quan fins i tot les lleis experimentals que han determinat llur adopció no són més que aproximatives. En d'altres paraules, els axiomes de la geometria (no parlo dels de l'aritmètica) no són més que definicions disfressades. Llavors, què cal pensar d'aquesta qüestió: és vertadera la geometria euclidiana? No té cap sentit. És com demanar si el sistema mètric és vertader i les antigues mesures falses, si les coordenades cartesianes són vertaderes i les coordenades polars falses. Una geometria no pot ser més vertadera que una altra; sols pot ser més còmoda» (La science et l'hypothèse, pàgs.66-67). Tanmateix sembla haver anivellat massa els diversos graus de convenció i la circumstància que el cos euclidià, en conjunt, no és pas convencional sinó més aviat el model des d'on aprenem, això en el cas de la correcció dels nostres supòsits i fins i tot en consonància amb l'observació reiterada del gran matemàtic francès que construïm els models teòrics a partir de la interacció amb l'experiència.

seguiments naturals. Som davant d'un pensament lingüístic que té sols aquesta entitat: sons i afeccions, cositat resultant dels aprenentatges i de l'espontaneïtat humana (si ens plau de sentir paraules belles). En una accepció més ampliada, una geometria no-euclidiana és també abstracta en l'accepció que combina una pauta lingüística irrepresentable amb el seguiment ~~posicional~~ inspector (sovint aferrissadament ~~posicional~~ inspector), o les afeccions que el reemplacen, un art meravellós que causa més aviat sorpresa per la versatilitat de la conducta humana que testimonieja. Quan, i acabant, parlem de la no-contradicció de la geometria de Lobatxevski, o del fet que és conseqüent, devem voler expressar que les pautes lingüístiques irrepresentables de què ens hem fornit i totes aquelles pautes (i ~~posicions~~ inspeccions) que acceptem de la geometria normal valen per elles mateixes i que el discurs que en va brollant no troba (ni accepta) afirmacions o negacions contradictòries.

El paràgraf 92 exemplifica una mica el que anem dient: la geometria euclidiana manté que la igualtat entre els angles de dos triangles no suposa llur congruència, però la geometria de Lobatxevski ho fa en la ~~mida~~ mesura que ha hagut d'admetre que la suma dels angles d'un triangles contingut en un altre és ~~menor~~ més gran que la dels angles del triangle continent; el tipus de lògica que s'hi troba és l'apresa en els nostres raonaments lingüístics: dos triangles que tenen els angles iguals o són iguals o són semblants (l'un pot estar contingut en l'altre); com aquí no poden ser semblants, doncs són iguals. La segona part exercita una reducció a l'absurd tenint en compte les estipulacions, la ~~posició~~ inspecció i els hàbits adquirits (noteu que la suma dels angles és π+ BDB' a través de C'+(π-C)+ BDB', on C'=C). El següent paràgraf serà potser ja conegut pel lector[29]:

«LÍNIES PARAL.LELES

§ 93

Les línies que surten d'un punt o tallaran una recta donada en el mateix pla o no la trobaran mai per més que les perllonguem. Per això ~~en~~ entre aquestes línies ~~en~~ relació amb una recta donada cal diferenciar les secants o convergents i les no-secants o no-convergents, a les quals pertanyen les paral.leles, que constitueixen el pas de les unes a les altres, a les divergents. Les dues paral.leles a una línia donada divideixen el pla en quatre parts: les convergents es troben en dues parts oposades, les divergents en les altres dues.

Sigui donat en un pla la recta AB i el punt C: totes les línies que surten del punt C o han de tallar AB, com per exemple la perpendicular CD que cau sobre AB, o no han de trobar AB, com per exemple la perpendicular CE aixecada sobre CD (§ 48). Fent

[29] Ibidem, pàgs. 165-167.

giravoltar la línia CD sobre el punt C, passa des de les secants

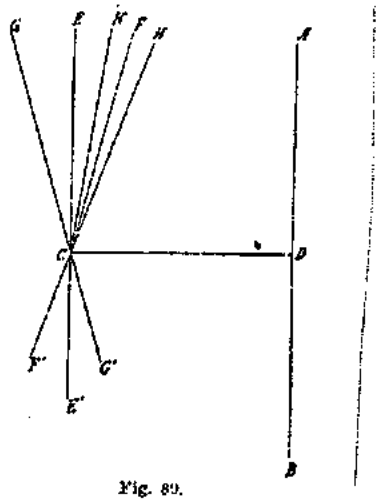


Fig. 89.

en l'angle FCG' a les no-secants en l'angle FCG, en acabant novament a aquelles línies en l'angle GCF', el perllongament de les quals pel punt C talla AB, finalment a les no secants en l'angle F'CG'. Els costats dels quatre angles estan donats pel fet que les dues línies FF' i GG' es tallen mútuament, i que, representant el pas de les secants a les no-secants, són paral.leles a AB. A més a més observem que totes les línies secants o no-secants romanen com abans quan passen a l'altra banda de la perpendicular CD amb el mateix angle.Per això podem conèixer les dues paral.leles tan aviat com sapiguem la manera d'estar col.locada una de les paral.leles, CF, en l'angle recte ECD. Llavors CG, l'altra paral.lela a AB, està traçada amb el mateix angle GCE = ECF a l'altra banda de EC. Finalment les dues paral.leles CF i CG amb els seus perllongaments CF' i CG' pel punt C constitueixen dos angles oposats pel vèrtex GCF i G'CF', enmig dels quals estan contigudes totes les rectes divergents de AB.

Quan diem que una recta és una paral.lela a una altra sols entendrem amb això a partir d'ara que les dues estan traçades pel mateix cantó d'una tercera línia que les uneix. Així CF és paral.lela a DA, CG' a DB, les dues en cada cas trobant-se a la mateixa banda de la línia CD. Des d'un punt donat doncs sols es pot donar una paral.lela a una recta qualsevol, el senyal caracteritzador de la qual està en el fet que per la més lleu
1r desviació passa a ser una línia convergent per un cantó, divergent per l'altre. Si per exemple CF és paral.lela a DA, llavors CH és una recta convergent amb DA, CK una de divergent, per més petit que els angles FCH i FCK puguin ser.

Des d'aquest punt de vista el paral.lelisme apareix ara amb plena universalitat. Euclides, sense donar una prova satisfactòria, admet en la geometria habitual el cas particular que dues paral.leles han de ser perpendiculars alhora a una tercera recta. D'aquesta manera desapareix aquí l'angle ECF, així com l'angle complet GCF amb el seu angle oposat pel vèrtex F'CG', per consegüent totes les línies, feta excepció de les paral.leles, tallen AB quan se les perllonga suficientment per un cantó o per

~~un~~ l'altre. Els seguidors d'Euclides han agreujat sols l'afer quan afegiren determinacions complementàries que eren o arbitràries o completament fosques, i quan s'esforçaren de convèncer-se de la 14 correcció d'una veritat suposada, que d'acord amb la més genuïna essència de la geometria és impossible de provar.

La inclinació d'una recta cap a una vertical que cau sobre una altra línia paral.lela a la primera, l'anomenem l'angle del paral.lelisme que pertany a aquesta vertical. Assenyalarem l'angle mateix amb Π (p), quan p és la vertical. Tanmateix volem remarcar que l'expressió Π (p) no representa ara per ara cap funció analítica, sinó que sols serveix com un signe que assenyala la pertanyença de l'angle Π (p) a la línia p».

Lobatxevski ha canviat l'ordre de presentació dels Elements, que demostraven que la suma dels angles d'un triangle són dos rectes a partir del paral.lisme (cf.Eucl.I,32); però aquí, havent-se ja presentat les hipòtesis de la suma dels angles d'un triangle, s'hi introdueix el paral.lelisme amb l'aparença d'una altra hipòtesi independent.

¿Com hem pogut saber que calia també introduir aquesta nova hipòtesi? Més avall tindrem l'oportunitat d'entreveure que el pas entre l'estipulació S<π i el nou paral.lelisme en una direcció i en l'altre no està absent de dificultats, però la necessitat d'una nova pauta es fa del tot evident en la ~~mica~~ mesura que repassem Eucl.I,32: sigui fàcil o difícil aquell pas, nosaltres no podem acceptar el paral.lelisme euclidià i l'estipulació S<π. L'encert d'aquestes consideracions reblaria una vegada més que l'aprenentatge i la confecció d'una nova geometria arrenca de les consideracions euclidianes, al marge de la presentació de les noves idees.

El caràcter convencional de la nova pauta es comprova així mateix quan Lobatxevski circumscriu el nom de 'paral.leles' a les línies que limiten les convergents i les divergents, aquestes -q últimes ~~(que les encleuen)~~ no tallant la línia de referència. Per contra no podem pas definir aquest nou paral.lelisme a partir de l'equidistància, sinó d'acord amb la definició d'Euclides: segurament mantenim que dues paral.leles no es tallen en l'accepció que dues línies equidistants no es tallen; la generalització de línies paral.leles pel fet de no tallar-se, quan no són equidistants, no seria més que l'estipulació lingüística que defensem davant la impossibilitat, no pas de tallar-se o de no tallar-se, sinó de representar-nos línies no equidistants el perllongament de les quals no permeti que es tallin si més no imaginàriament.

Una tal estipulació lingüística recolliria doncs ~~all~~ quelcom que he après de les paral.leles (euclidianes); tot i que no pugui mantenir en una inspecció ~~representativa~~ que siguin paral.leles, en afirmar que no es tallen i essent el seu no encreuament un dels supòsits del paral.lelisme les faig paral.leles d'acord amb aquest darrer punt. Som en un convenció: no és una nova definició de paral.leles perquè pel cap baix remunta fins a Euclides, però els pressupòsits han canviat: la definició dels Elements era capaç de ser un discurs lingüístic a partir de l'experiència lògica inspectora — la nova definició ja no permetria aquest procés, mentre que la superposició de les definicions d'Euclides i de Lobatxevski, essent formalment iguals, condensarien vicissituds intel.lectuals diverses: es tracta que la segona definició provindria de bell nou de la primera, servant fins i tot les paraules, guardant la inspecció des d'una tal pauta, suposant tot plegat l'ensinistrament en les disciplines matemàtiques; d'aquí, per exemple, que ~~ens~~ trobem ara infinites línies que no tallen una línia donada que es troba en el mateix pla, que l'angle del paral.lelisme podrà ser divers d'un recte, etc.

Passem doncs a d'altres dos paràgrafs. Els Nous rudiments van establint les següents proposicions: si dues rectes tallen una tercera fent angles iguals per un mateix cantó, les dues rectes no es tallen (Nous rudiments § 94); el punt per a circumscriure la línia paral.lela a una línia donada pot ser un qualsevol de la primera línia (§ 95); si una línia és paral.lela a una segona, aquesta ho és de la primera (§ 96); dues paral.leles són també paral.leles a la recta que s'origina per la intersecció de dos plans cadascun dels quals conté una de les primeres rectes (§ 97); es pot traçar per un punt donat una recta tal que faci un angle tan petit com es vulgui amb una segona recta donada (§ 98); dues rectes que són paral.leles a una tercera són paral.leles l'una a l'altra (§ 99); quan tres plans es tallen en línies paral.leles la suma dels angles plans és igual a π (§ 100), i llavors ve aquest important paràgraf[226]:

«§101

Quan en un triangle la suma dels tres angles és igual a π, llavors dues rectes que són perpendiculars a una tercera, són paral.leles l'una a l'altra.

Siguin AB i CD (Fig.97) perpendiculars les dues a la recta AC. Unim el punt extrem d'aquesta, A, a un qualsevol punt D de CD amb la recta AD. En el triangle rectangle ACD la suma dels dos angles aguts és igual a 1/2 π, també ~~es~~ tenim igualment se

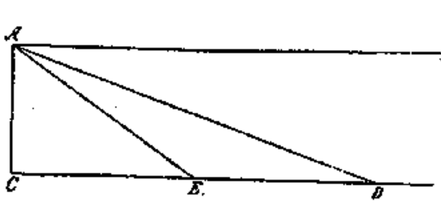


Fig. 97.

[226]Ibidem, pàg.173. Fem notar que Nous Rudiments § 94 és un fet d'inspecció lògica fins i tot aquí.

$$\angle CAD + \angle DAB = 1/2\ \pi$$

per conseqüent l'angle

$$BAD = ADC;$$

però el darrer pot fer-se tan petit com es vulgui (§98), per conseqüent AD talla sempre la recta CD no important com de petita sigui la seva desviació respecte de AB. Això significa que CD i AB són paral.leles (§93).

Per això dues línies són en general paral.leles en aquest supòsit quan una tercera les creua amb angles iguals per un mateix cantó, i per conseqüent dues rectes es tallen l'una a l'altra sempre que estan inclinades amb uns tals angles interns respecte d'una tercera recta que es troba entre les primeres, la suma dels quals és $<\pi$.

Quan al contrari s'admet que quassevol dues línies perpendiculars a una recta són paral.leles, llavors cal que la suma de tots tres angles en els triangles sigui igual a π.

Siguin per exemple AB i CD, les dues perpendiculars a AC, paral.leles l'una a l'altra, i diguem que en el triangle ACE la suma dels tres angles és $\pi-\alpha$, per conseqüent l'angle $BAE>\alpha$. Fem l'angle $BAD = \alpha$, llavors AD talla la línia CD i es produeix un triangle ADC, en el qual la suma $\pi-\alpha+ ADC$ dels tres angles o ha de ser igual a la suma dels tres angles en el triangle ACE o ha de ser més petita que aquesta (§91). D'això se segueix

$$\pi - \alpha + \angle ADC \leq \pi - \alpha,$$

un contrasentit que sols amb el supòsit: $\alpha = 0$ pot abandonar-se (§93)».

El paràgraf palesa les dificultats de derivar el paral.lelisme (d'Euclides) a partir de l'assumpció $S=\pi$. L'exercici -- que segueix un lema de Legendre -- sembla superposar dos tipus de consideracions : (1) que l'angle ADC pot anar decreixent a mida que correm el punt D per la dreta, per tant quelcom que hauria de circumscriure sempre un triangle, que no tindria res a veure amb el paral.lelisme, i que faria un raonament autònom; (2) la construcció de dues línies que una tercera talla en angles rectes i que la inspecció lògica valora com a línies paral.leles: la impossibilitat de la línia AD d'abastar l'AB «significa» certament que AB és paral.lela a CD, però el pas d'AD a AB és, si se ns permet l'expressió, un salt en l'abisme.

Però la derivació de $S=\pi$ a partir del paral.lelisme euclidià mostra així mateix que no és pas fàcil de substituir Eucl.I,32, com ho indica la reducció a l'absurd del text. En efecte el camí «normal» sembla que segueix aquestes passes: primer acceptem les paral.leles euclidianes, i després treballem Eucl.I,32, perquè de $S=\pi$, dins de l'euclidianisme, és prou difícil el pas per a demostrar el paral.lelisme. La geometria de Lobatxevski partint també de l'estipulació $S<\pi$ veu compromès el pas cap al paral.lelisme tant euclidià (que fins i tot per estètica fóra interessant d'estudiar a partir de $S=\pi$) com ~~el~~ cap no-euclidià (que caldria acceptar-lo potser justament a causa d'Eucl.I,32, això és, raonant d'acord amb les categories apreses): per això les estipulacions del paral.lelisme apareixen expositivament d'una manera independent de les pautes per a S (cf. Nous rudiments § 93).

En acabant no voldríem deixar aquestes notes sense permetre delectar el lector amb la lectura del següent paràgraf, una mostra del geni de l'autor rus i de la força de l'home per a ensenyar-se a partir dels aprenentatges de la lògica inspectiva[27]:

"§102

Pressuposi's que en un triangle la suma de tots els angles és $<\pi$, llavors l'angle $\Pi(a)$ disminueix gradualment mentre a creix; comença amb un valor $\Pi(a) = 1/2\ \pi$ per a $a = 0$, i s'aproxima al límit $\Pi(a) = 0$ per a $a = \infty$.

Observem de primer que $\Pi(a) > \Pi(b)$, quan $a<b$. Sigui $AB = a$, $AC = b$ (Fig.98), AA' perpendicular a AC; BB' i CC' paral.leles a AA', per conseqüent l'angle $ABB' = \Pi(a)$, $ACC' = \Pi(b)$. és impossible de suposar $\Pi(a) = \Pi(b)$, altrament hi hauria dues perpendiculars a una recta que serien paral.leles (§94). Encara menys es pot

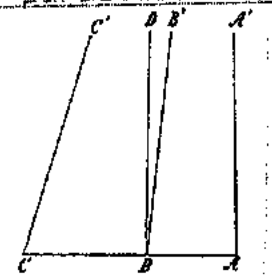


Fig. 98.

admetre $\Pi(a) < \Pi(b)$ per a $a<b$ perquè en aquest cas la recta BD tallaria CC' quan es fes l'angle ABD igual a ACC'.

Ara mostrarem que es pot trobar per a cada angle A entre els límits: $A = 0$ i $A = 1/2\ \pi$ una tal línia a, que $A = \pi(a)$.

A un ~~mateix~~ costat de l'angle A (Fig.99) prenguem un qualsevol punt B i caigui la vertical BB' des d'aquest cap a l'altre costat. Així s'origina un triangle rectangle ABB' amb els catets AB' i BB', en el qual la suma dels tres angles és igual a $\pi-\alpha$. Perllonguem el costat AB' i fem $B'C' = AB'$, igualment $C'D' = AC'$, etcètera. En els punts C', D',.... tracem pel mateix costat les perpendiculars CC', DD',.... en la mesura que puguin trobar l'altre costat en certs punts C, D,... Mentre unim els punts B i C', C i D',.... amb rectes, obtenim: $AB'B \cong B'BC'$, $ACC' \cong CC'D'$, ... A més d'això en el triangle ABC' la suma dels tres angles ha de ser igual a $\pi-2\alpha$, en el triangle ACC' més petita que $\pi-2\alpha$ (§91), en el triangle ACD' més petita que $\pi-4\alpha$, i encara més petita en el triangle ADD'. Per

[27]Ibidem, pàgs.174-176.

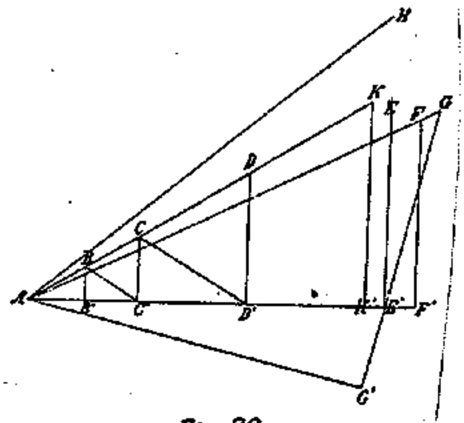


Fig. 99.

això en general hem de trobar aquesta suma més petita que $\pi-2^n\alpha$, on n és un nombre enter positiu. Això exigeix que finalment certes perpendiculars EE´, FF´ no es trobin, a un mateix cantó de l´angle A, amb les altres línies. Entre aquelles sigui EE´ la perpendicular a AE´ que no es troba amb AD, mentre que totes les restants perpendiculars a un mateix cantó seu, segons l´angle A, tallen AD i alhora totes les perpendiculars FF´ a l´altre cantó seu, per més que les allarguem, no es troben amb AD. En aquest cas el costat AD és paral.lel a la perpendicular EE´.

Per tal de convèncer-nos d´això, tracem des del vèrtex de l´angle A per dins i per fora, a l´altre cantó del costat AD, les rectes AG i AH. La segona no pot trobar-se amb EE´, perquè altrament s´originaria un triangle del qual la recta AD no podria sortir sense tallar el costat EE´. Tracem endemés fora de l´angle A i des del seu vèrtex la recta AG´, que està inclinada respecte del costat AD´ amb el mateix angle que, en l´interior, AG respecte de AD. Sobre AG´ fem caure des de E´ la vertical E´G´ i aconseguim així un triangle rectangle AE´G´, on AG´<AE´. Quan posem doncs AG´ des del vèrtex A sobre AE´, llavors AG cobreix AD i el punt G´ cau en algun lloc entre els punts A i E´ a K´; per conseqüent la perpendicular GG´ es transforma en la perpendicular KK´ a AE´ que determina la distància AK = AG del punt G, punt que la recta AG ha d´abastar i per tant ha de construir un triangle AGE´ on la recta EE´ talla el costat AG. Faci´s doncs giravoltar AD sobre el punt A i per més poc que es desviï de la seva posició primitiva, llavors talla EE´ tan aviat com va per un cantó, mentre que no es troba amb EE´ quan va per l´altre cantó.

Mantenint la constància del canvi volem completar els valors de $\Pi(a)$, mentre suposem $\Pi(a) = 1/2\ \pi$ per a $a = 0$ i $\Pi(a) = 0$ per a $a = \infty$, finalment volem estendre la determinació a totes les línies negatives, mentre establim

$$\Pi(a) + \Pi(-a) = \pi,$$

on també la línia a tant pot ser zero com un nombre positiu o negatiu que creix fins a l´infinit.

Malgrat que l´expressió $\Pi(a)$, com ja remarcàrem abans (§93) ha de servir sols com a signe per a un angle, amb la indicació alhora de la línia a, a la qual pertany un tal angle, una tal dependència pot ser assenyalada, en la mesura que no és conseguda, com una funció geomètrica en contraposició amb una funció analítica que està completament determinada o pels seus valors numèrics o per certes igualtats condicionals.

En la geometria habitual se suposa que l'angle del paral.lelisme sempre és igual a un recte. Tanmateix es pot pressuposar també aquest angle com a variable, és a dir en la geometria universal o imaginària, que comprèn la geometria habitual com un cas particular, l'únic a més que ens lliura mesures portades realment a terme».

El text pot oferir alguna dificultat de comprensió: noti's que és impossible que $\pi(a)=\pi(b)$ (figura 98) perquè BB' i CC', que són paral.leles (Nous rudiments §99), ho serien sols en sentit euclidià quan, en general, hem pressuposat un altre criteri de paral.lelisme (Nous rudiments §93: es tracta doncs d'una estipulació). Però tampoc no podem admetre $\pi(a)<\pi(b)$ perquè, BB' i CC' essent paral.leles en la nova accepció, si $\pi(a)<\pi(b)$, llavors quan $ABD>\pi(a)$, BD seria una línia convergent amb CC' (Nous rudiments 93); alhora quan $\angle ABD = \pi(b)$ BD i CC' no es tallarien (Nous rudiments 94), cosa que és absurda: no tenim un altre remei que acceptar que $\pi(a)>\pi(b)$. D'altra banda la intenció de Lobatxevski en la figura 99 és la d'assimilar la línia AE' de la figura 99 amb BA (o CA) de la figura 98 i la línia AD de la figura 99 amb la línia BB' (o CC') de la figura 98.

En la figura 99 la perpendicular EE' o FF' no troba ja el costat AD de l'angle A quan tenim el supòsit que la suma dels tres angles (un dels quals és recte) hauria de ser, per exemple, menor que $\pi/2$; el triangle no es pot tancar talment com en geometria euclidiana S ha de valer π: és impensable un triangle euclidià la suma dels angles del qual sigui menor que π i de fet no hi ha un tal triangle; per tant quan en l'euclidianisme un dels angles val $\pi/2$, els altres dos plegats no poden ser més petits que $\pi/2$ ni més grans, i.e. $S-\pi/2=\pi/2$ —— en el cas de la proposició que estudiem, pautat $s<\pi$ i donat un angle igual a $\pi/2$, el valor dels altres dos plegats es troba entre 0 i $S-\pi/2$ (on $S<\pi$). D'altra banda sols és possible que tres línies situades en un pla, dues de les quals essent perpendiculars, no tanquin un triangle en geometria euclidiana quan si més no la tercera és paral.lela a una d'elles o s'hi superposa (un molt particular cas de paral.lelisme) —— d'aquí que, en el cas de la geometria de Lobatxevski s'imiti l'afer: EE' o és paral.lela a AD o s'hi superposa, i en aquest cas acceptem la primera solució perquè EE' està separat si més no d'AD.

L'angle del paral.lelisme de la línia AD essent l'angle format per la perpendicular AE' i la paral.lela AD a la línia EE', quan EE' és la primera línia que no talla AD, el fet exemplifica la construcció de paral.leles a partir de dos costats d'un triangle: havent establert anteriorment que l'angle del paral.lelisme decreix a ~~mida~~ mesura que augmenta el valor de la perpendicular a la línia de la qual la que estudiem és paral.lela, Lobatxevski recorre a la llei de la constància per a establir que aquell angle tindrà un valor màxim de π/2, quan les dues paral.leles coincideixen, i de π=0 quan el valor de la perpendicular valgui infinit: en efecte, en la figura 98 observem que l'angle de paral.lelisme va decreixent més; en la figura 99 hem pogut estudiar que la suma dels angles dels triangles decreix a ~~mida~~ mesura que augmenta la perpendicular AB'C'D'K' fins arribar a E' que ja no tallà AD, i que per tant marca l'angle del paral.lelisme, amb l'afegit que un dels angles del triangle té un valor constant (π/2).

En qualsevol cas es tracta de ser conseqüent amb la lògica de les relacions geomètriques que hem aprés de sempre tenint en compte les noves pautes que hem estipulat (gràcies precisament a l'hàbit de les relacions geomètriques i al domini de les seves entitats que s'expressen en el pensament lingüístic).

CLOENDA

Els esbossos que ara acabem sembla que han indicat que és possible una aproximació a algunes nocions de l'aritmètica i de la geometria elementals a partir dels nostres mínims supòsits, i hem pogut assenyalar així mateix algunes de les relacions entre, d'una banda, els afers naturals i representatius, i, d'altra banda, les generalitzacions, les formalitzacions i les abstraccions emparentades amb els llenguatges quotidians i de la ciència.

En efecte un dels mèrits del nostre radicalisme i positivisme lògics rau potser en el fet que no tindrien propensió a substituir (lògicament) uns usos lingüístics, matemàtics o no, per d'altres moments, és a dir, mentre tendeixen a resoldre els dubtes del significat de mots que usem en els nostres llenguatges, accentuen que l'esclariment val d'una manera absoluta i que no es troba en les conductes lingüístiques que esclareix, alhora que defensa que unes tals conductes tenen també el seu propi contingut lògic, i entrarien així en els processos racionals. Però el propi positivisme ens obliga a respectar rigorosament les pluralitats lògiques: hi ha afers que determinem de manera natural/reproductiva, d'altres que sols poden tenir un contingut (lingüístic) lògic, mentre que tant els primers com els segons són de tarannàs varis: no tot podria entrar en el mateix sac, les remissions dels problemes semblen haver de seguir camins plurals i per això, entre altres motius, la feina d'un cert àmbit de la filosofia rauria tant a explorar, trobar i dirigir esclariments en direccions plurals, com a accentuar les diferències entre l'esclariment i l'esclarit, i entre els mateixos continguts (lingüístics) lògics. Per això podríem dir que no hi hauria mètode en l'accepcio forta d'un conjunt de regles fàcils per a tots els possibles dubtes; n'hi hauria quan l'entenguéssim tal i com ho proposàrem.

D'altra banda els nostres supòsits mínims, si proclamen obertament i sense cap mena de complex que nombrosos problemes intel.lectuals es descabdellen (i fins i tot sols es poden descabdellar) a nivell de continguts (lingüístics) lògics, han fet constar també sense cap mena de vergonya que els continguts lingüístics es resolen en formes i afeccions i que els continguts naturals i representatius van essent determinats a tall de moments lògics, que són els que garanteixen (quan això és possible) l'encert d'alguns usos dels nostres registres en els afanys teorètics, com sigui que la llengua en té prou i plurals. La importància d'això es palesa quan es fa avinent que la filosofia, si més no en alguns dels seus àmbits, hauria de garantir que no recau en el verbalisme, és a dir que hauria de diferenciar entre els continguts lògics lingüístic i els no lingüístics, i hauria d'investigar en el propi terreny natural allò que es defensa de trobar--hi. Perquè de vegades semblen haver-se barrejat massa precipitadament els diversos problemes relacionats amb els comportaments lingüístics, això és, la circumstància que la llengua s'usa quotidianament com a registre, el fet que les nostres disciplines han fet aparèixer definicions que són sols registres, l'existència de geometries que sols tenen, en allò que els és privatiu, pensament lingüístic, etc., de tal manera que un hom justificaria un qualsevol discurs teorètic pel sol fet de ser un assumpte lingüístic, quan, ben mirat, és el propi afany racional que cerca defincions merament lingüístiques o exposicions merament lingüístiques de les disciplines matemàtiques (per exemple) el que demanaria que allò que no vol ser un mer discurs lingüístic no ho sigui de fet, i en la mesura que la defensa que tot és discurs lingüístic sembla ja una afirmació no merament lingüística.

El caràcter absolut de la reflexió fa així mateix que el present treball no tingui més propòsits que el propi exercici que desplega; nosaltres havent diferenciat, per exemple, els diversos nivells de les disciplines matemàtiques bàsiques, es podria creure que una de les feines de la filosofia és precisament la de sistematitzar-los, amb la certesa que la resultant més abstracta és això, un final de camí, que sols s'ha admès pel propi viatge (i que ningú no gosaria entendre sense una tal guia). En efecte els implícits de la pròpia activitat matemàtica abstracta remetrien en principi a les consideracions de les coses i dels aprenentatges, i en la mesura que les nostres resultants abstracte pressuposessin els propis implícits i fossin el terme de l'aprenentatge d'un individu sembla obvi que l'estudi dels motius de l'acceptació de les passes que ens hi ha dut sigui una de les maneres de complementar la nostra ciència, que recau a més a més en les consideracions socials de transmissió de coneixements, per consegüent de la història de les nostres disciplines; la història d'una ciència no seria certament la transcripció dels progressos d'un individu en tant que el nostre medi social hauria condensant els esforços dels avantpassats i n'hauria donat una exposició consistent: els nostres aprenentatges més aviat serien una de les conseqüències d'aquesta història, i per això el seu estudi seria més aviat una de les garanties que farien versemblant la nostra digressió. L'exposició dels motius d'una ciència abstracta -- la circumstància de donar-ne raó -- remetria doncs aquí necessàriament als implícits i a la seva història (un fet públic): es tractaria una mica de recuperar les nostres pròpies obvietats o la memòria d'un descabdellament públic a partir de la condensació de l'adult contemporani que ho viu com a conducta; i no havent-hi sobredeterminació l'estudi des d'alguns orígens (actuals o històrics, tant se val ara) a les resultants sols se seguiria com a procés que caldria sistematitzar a partir d'unes mínimes assumpcions com les ofertes en el present treball.

Tot això seria així en l'exemple de les disciplines matemàtiques elementals (i que caldria perllongar), no ho seria al peu de la lletra quan passem a d'altres àmbits dels coneixement teòric, que demanarien més aviat, per exemple, les bases naturals o reproductives del propi discurs, o no ho seria exactament a l'hora de l'estudi dels llenguatges quotidians, que palesaria que cal respectar la seva especificitat, malgrat que en qualsevol cas els supòsits mínims bàsics que hem mantingut al llarg de l'escrit semblen també del tot necessaris. Fet i fet hem assajat d'oferir alguna digressió de l'ús de mots del llenguatge quotidià i fins i tot hem suggerit alguna cosa del paper del llenguatge quotidià en conjunt i de les seves generalitzacions, que si més no han barrat el pas, sembla, als logicismes i als idealismes, en la mesura que n'hi hauria prou amb els nostres punts de partida per a garantir l'eficàcia quotidiana i els usos teòrics dels nostres registres.

El nostre treball ensenya doncs que, l'activitat lògica valent d'una manera absoluta, l'assaig d'una certa exposició sistemàtica a partir d'unes mínimes assumpcions no fa més que allò que fem cada dia, ocupats com estem en afers lingüístics i extralingüístics, sols que procura fer-ho amb un cert control dels moments, alhora que recupera, quan és possible i en el cas de les disciplines matemàtiques, els moments lògics que han dut a un aprenentatge merament abstracte, fins a reconèixer que certs exercicis de les nostres disciplines no poden pensar-se més que tal qual. Es tracta d'una exposició sempre oberta en virtut del positivisme que la inspira, però alhora és l'única investigació capaç de discutir l'abast d'una qualsevol certesa humana i el lloc que ocupa en l'univers lògic. Per això res no li és aliè, i resta constantment com a tasca a fer.

REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

Sols s'inclouen els treballs dels quals s'ha fet referència directe en els presents apunts (s'hi ometen els pensadors grecs clàssics). El lector podrà trobar una més extensa bibliografia en prou d'aquests estudis així com en les revistes especialitzades:

AUSTIN, J.L., How to do things with words, recull de les conferièncics fetes a la Universitat de Harvard el 1955, i publicades per J.O.Urmson i Marina Sbisà, Oxford University Press, 1978 (1ª a Clarendon Press, 1962), VIII+168pp.

AYER,A.J., Language, truth and logic (1936, 1ª anglesa; 1946, 2ª); la citem per LLenguatge, veritat i lògica, trad. de Josep-Lluís Blasco, Edicions 62, Barcelona, 1983. 210pp.

BECH, Josep Mª, Els problemes d'identitat de la doctrina fenomenològica, a La recerca del sentit i l'experiència del temps, Anthropos, Barcelona, , Estudis de Filosofia, 4.

BENACERRAF,Paul, What numbers could not be, Philosophical Review 74(1965), pàgs.47-73. Reproduït a Philosophy of mathematics, Cambridge University Press, 1964 (recull de vint-i-vuit articles i d'una extensa bibliografia a càrrec de P.Benacerraf i H.Putnam: en la segona edició de 1983 -- per on citem sempre -- hi ha alguns canvis en la selecció d'articles), pàgs.272-294.

BOCHENSKI, I.M., Formale Logik, Alber, Freiburg/München ,1956. XV+639pp.

BOOLE, George, An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, Dover Publications, (sense data), Nova-York. Es tracta d'una edició completa de l'obra de Boole, que aparegué per primera vegada el 1854. XVIII+424pp.

BOURBAKI, Nicolas, Éléments de mathématique. Théorie des ensembles, Hermann, Paris, 1970 (nova edició); la paginació és per seccions.

BROUWER,L.E.J., Consciousness, philosophy and mathematics (1948), reproduït a Phylosphy of mathematics, pàgs.90-96

BRUNSCHVICG, Léon, Les étapes de la philosophie mathématique (1912), A.Blanchard, Paris, 1972. IX+592pp.

CANTOR, Georg, Gesammelte Abhandlungen. Mathematischen und philosophischen Inhalts, Georg Olms, Hildesheim, 1966. Es tracta d'una reproducció del volum editat el 1932 a Berlín, a cura de

Ernst Zermelo, amb una biografia de Cantor feta per Adolf Fraenkel. VII+486pp. Entre d'altres s'hi recullen les obres:

Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, a Crelles Journal f.Mathematik, vol.84,pàgs.242-258 (1878); en l'edició esmentada, pàgs.119-133.

Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, a Math.Annalen vol.15,pàgs.1-7 (1879); vol.17, pàgs.355-358 (1880); vol.20, pàgs.113-121 (1882); vol.21, pàgs.51-58 i 545-586 (1883); vol.23, pàgs.453-488 (1884); en l'edició esmentada, pàgs.139-246. La part de 1883 compren els famosos Grundlagen einer allgemeinem Mannigfaltigkeitslehre.

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, a Math.Annalen vol.46, pàgs.481-512 (1895); vol.49, pàgs.207-246 (1897); en l'edició esmentada, pàgs.282-356. L'escrit constitueix el lloc clàssic de presentació de la doctrina dels nombres transfinits cantorians.

CARNAP, Rudolf, Der logische Aufbau der Welt, Weltkreis, Berlin-Schlachtensee, 1928. XII+290pp.

DEDEKIND, Richard, Gesammelte mathematische Werke, publicades en tres volums a càrrec de Robert Fricke, Emmy Noether i Öystein Ore, Friedr.Vieweg, Braunschweig, vol.I(1930), 397pp.; vol.II (1931), 442pp.; vol.III(1932), 508pp. En el darrer volum s'hi recullen les obres:

Stetigkeit und irrationale Zahlen (1872, 1ª), pàgs.315-334.

Was sind und was sollen die Zahlen (1888, 1ª), pàgs.335-391.

FREGE, Gottlob, Begriffsschrift und andere Aufsätze. Segona edició a càrrec d'Ignacio Angelelli. Georg Olms, Hildesheim, 1988 (1ª 1964). XVI, 124 pp. Recull rellevantment: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens (1879), Anwendungen der Begriffsschrift (1879), Über den Zweck der Begriffsschrift (1883).

Die Grundlagen der Arithmetih. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl(1884).Usem l'edició de Philipp Reclam jun., Stuttgart, 1987. 160 pp. Amb un epileg de Joachim Schulte.

Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. Volum I (1893). II (1903). Usem d'edició de Georg Olms, Hildesheim, 1962, (I) XXXII+253, (II) XV+265 pp.

Funktion, Begriff, Bedeutung. Fünf logische Studien, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1962 (1986, 6ª). Edició preparada i introduida per Günther Patzig. Recull Funktion und Begriff (1891), über Sinn und Bedeutung (1892), über Begriff und Gegenstand (1892), Was ist eine Funktion? (1904) i über die wissenschaftliche

Berechtigung einer Begriffsschrift (1882). 106pp.

Logische Untersuchungen, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1966 (1986, 3ª). Edició preparada i introduïda per Günther Patzig. Recull Der Gendanke. Eine logische Untersuchung (1918), Die Verneinung. Eine logische Untersuchung (1918), Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge (1923), Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E.Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik (1895) i Über die Zahlen des Herrn H.Schubert (1899). 146pp.

Schriften zur Logik und Sprachphilosphie, Felix Meiner, Hamburg, 1971 (1978, 2ª). Es tracta d'un recull d'escrits pòstums, amb una introducció, notes i una molt bona bibliografia de les obres de Frege i sobre Frege (fins l'any 1971) a càrrec de Gottfried Gabriel. IX+224pp.

GÖDEL, Kurt, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, a Monatshefte für Mathematik und Physik n.38 (1931), pàgs.173-198.

Russell's mathematical logic, recollit a The philosophy of Bertrand Russell, The library of living philosophers, Evanston, Ill. (1944), pàgs.125-53. El citem segons l'edició de la Philosophy of mathematics (Benacerraf i Putnam), pàgs.447-469.

GRAELL I DENIEL, F.,Sobre el problema fenomenològic del jo, a Enrahonar. Quaderns de Filosofia. n.4 (1982), pàgs.87-103. El treball pot servir per a la crítica de la identitat en Husserl, Heidegger i Sartre.

Intentionality: reality, logos and open-endedness, a Analecta Husserliana, vol.XXIX (1989), pàgs.461-480. Treball del 1985 amb motiu del XVIII Congrés Internacional de Fenomenologia que assenyala un punt d'inflexió sobre la noció de realitat. La versió catalana està recollida a La filosofia del temps, Columna, Barcelona (1987).

Variacions lògiques. Escrit del 1987 per a les Primers Jornades de Fenomenologia (Associació Catalana de Fenomenologia), que assenyala el pas al present treball mantenint encara algunes vacil.lacions respecte de la identitat i de la reflexió. Anuari de la Societat Catalana de Filosofia III (en premsa).

GUITEL, Geneviève, Histoire comparée des numérations écrites, Flammarion, París, 1975. 851pp. Estudia les numeracions egipcia (pàgs.55-137), hebrea, asteca, grega (pàgs.181-195;240-265), romana, hebrea, etiòpica, àrab, sumèria i babilònica (pàgs.297-354), maia, xinesa i hindú.

HEATH, Thomas L., The thirteen books of Euclid's Elements. Traduïts a partir del text de Heilberg. Tres volums: vol.I inclou una magnífica introducció d'aquest estudiós (pàgs.1-151) i els llibres I i II profusament anotats i comentats. Vol.II conté els llibres

III-IX, vol.III els llibres X-XII, sempre àmpliament anotats i comentats. Es tracta d'una edició dels _Elements_ magnífica i del tot recomanable. El llibre encara es troba a la venda a Dover Publications, Nova York, 1956 (1ª, hi ha tanmateix d'altres reimpressions posteriors). Vol.I XII+432pp., II 436pp., III 546pp.

A history of greek mathematics, Dover Publications, Nova York, 1981. Dos volums: vol.I _From Thales to Euclid_, XV+446pp; vol.II _From Aristarchus to Diophantus_, XI+585pp. Reprodueix l'edició de la Clarendon Press d'Oxford de 1921.

Greek mathematics, Dover Publications, Nova York, 1963. Reprodueix _A manual of greek mathematics_, Oxford University Press, 1931. XVI+552pp.

HEIDEGGER, Martin, _Vom Wesen der Wahrheit_. La primera edició és del 1943 (Vittorio Klostermann, Frankfurt amb Main); conté el text molt revisat d'una conferència de 1930, publicada amb el mateix títol el 1930 i el 1932, al qual s'afegí la nota final en la segona edició de 1949. El citem per _Wegmarken_, Vittorio Klostermann, Frankfurt am Main, 1967 (1978, 2ª), pàgs.175-199.

HEMPEL, Carl G., _On the nature of mathematical truth_, a _The American Mathematical Monthly_, vol.52 (1945), pàgs.543-556; recollit a _Phylosophy of mathematics_, pàgs.377-393.

HILBERT, David, _Grundlagen der Geometrie_, Teubner, Stuttgart, 1899 (1987, 13ª). L'obra ha estat revisada i allargada en les successives edicions, a més de contenir una sèrie de suplements de Paul Bernays. VII+271pp.

Über das Unendliche, a _Mathematische Annalen_ vol.95(1926), pàgs.161-190. Conferència pronunciada el juny de 1925 en les sessions organitzades per la Societat Matemàtica Westfaliana a Münster i.W. en honor de Weierstrass.

HILBERT, David i BERNAYS, Paul, _Grundlagen der mathematik_, vol.I, Springer, Berlín, 1934, XII+471pp.; vol.II, Springer, Berlín, 1939, XII+498pp.

HUSSERL, Edmund, _Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie_. Llibre primer: _Allgemeine Einführung in die reine Phänomenologie_, text de les tres primeres edicions, _Gesammelte Werke_ (Husserliana), vol.III/1, Martinus Nijhoff, L'Haia, 1976. LVII+476pp.

KNEALE, William and Martha, _The development of Logic_. The Clarendon Press, Oxford, 1961 (1986, 9ª). VIII+783. Conté una selecció bibliogràfica.

LOBATSCHEFSKIJ, Nikolaj Iwanowitsch, _Zwei geometrische Abhandlungen_, 1898, traduït del rus i anotat per Friedrich Engel. Part primera: _Die Uebersetzung_; conté _Ueber die Anfangsgründe der Geometrie_ i _Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer_ _vollständigen Theorie der Parallelien_, XVI+235. Part segona: _Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften. Register_, 237-476pp. Les dues parts formen el primer volum de les _Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie_, a cura de Friedrich Engel i Paul Stäckel, Teubner, Leipzig, 1899.

MERLEAU-PONTY, M., _La structure du comportement_, Presses Universitaires de France, 1942 (1972, 7ª). XV+248pp.

Phénoménologie de la perception, Gallimard, París, 1945. XVI+531pp.

Sur la phénomenologie du langage a _Problèmes actuels de la phénomenologie_ (Premier Colloque International de Phénomenologie). Desclée de Brouwer, Brussel.les, 1952, pàgs.91-109. Recollit a _Signes_, Gallimard, París, 1960. pàgs.105-122.

Le langage indirect et les voix du silence a Les Temps Modernes, (I) 7, 1952, 2113-2144; (II) 8, 1952, 70-94. Recollit a _Signes_, pàgs.49-104.

La conscience et l'adquisition du langage a _Maurice Merleau-Ponty à la Sorbonne_ (_résumé de ses cours établi par des étudiants et approuvé par lui-même_). Bulletin de Psychologie, 18, 1964, pàgs.109-336. A les pàgines 226-259 del volum citat.

PEANO, Giuseppe: les més importants obres d'aquest matemàtic estan recollides en els tres volums de les _Opere scelte_, editades a cura de la Unione Matematica Italiana, Edizioni Cremonese, Roma (1957, 1958 i 1959). Els treballs citats pertanyen tots al segon volum (_Logica matematica. Interlingua ed algebra della grammatica_). VI+518pp.

Operazioni della logica deduttiva (1888), pàgs.3-19.

Arithmetices principia, nova methodo exposita (1889), pàgs.20-55.

Notations de logique mathématique, Introduction au Formulaire de mathématique (1894), pàgs.123-176).

Studii di logica matematica (1897), pàgs.201-217.

Logique mathématique (Formulaire de mathématiques, t.II, paràgraf primer) (1897), pàgs.218-281.

Risposta ad una lettera di G.Frege (preceduta dalla lettera di Frege) (1898). pàgs.288-296.

Formules de logique mathématique (1900). pàgs.304-361. Conté l'última exposició sistemàtica de Peano de la lògica matemàtica.

Recensione: A.N.Whitehead and B.Russell, Principia mathematica (1913), pàgs.389-401.

POINCARé, H., La science et l'hypothèse (1903), Flammarion, París, 1932. 292pp.

PROCLE DE LÍCIA (412-486 d.C.), Els comentaris al llibre primer dels Elements d'Euclides, edició de G.Fiedlein, Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii ex recognitione Godofredi Friedlein, Lipsiae, 1873; és prou recomanable la traducció de Paul Ver Eecke, Proclus de Lycie. Les commentaires sur le premier livre dels élements d'Euclide, Desclée de Brouwer, Bruges, 1948. XXIV+372.

PUTNAM, Hilary, Models and reality, a The Journal of Symbolic Logic vol.45, n.3 (setembre 1980), pàgs.464-82. Inclòs a Phylosophy of mathematics, pàgs.421-444.

QUINE,W.V., Mathematical logic, Harvard Unisersity Press, 1940 (revisada el 1951, de la qual edició citem la desena de 1983), XII+346pp.

Methods of logic, Holt and Company, Nova York, 1950 (1960, 3ª revisada). XVII+272pp.

Set theory an its logic, Harvard University Press, 1963. XII+359pp.

Philosophy of logic, Harvard University Press (1970, segona edició revisada el 1986), X+109pp.

REICHARDT, H, Gauss und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie. Mit Originalarbeiten von J.Bolyai, N.I.Lobatschewski und F.Klein, Teubner, Leipzig, 1985. Un llibre interessant sobretot per a estudiar l'aportació de Gauss en el descabdellament de les geometries no-euclidianes. 248pp.

RUSSELL, Beltrand, Introduction to mathematical philosophy, Allen and Unwin, Londres, 1919 (1963, 11ª). XVI+208.

SARTRE, Jean-Paul, L'être et le néant. Essai d'ontologie phénoménologique, Gallimard, Paris, 1943. El citem per l'edició de 1977 de la col.lecció Tel de la mateixa editorial. 692pp.

SCHRÖDER, Ernst, Vorlesungen über die Algebra der Logik, Leipzig, 1890-1905 (tres volums). Les citem per l'edició de Chelsea (Nova York, 1966 2ª), vol.I, 721pp., vol.II, 606pp., vol.III, 819pp. El segon volum enclou una breu biografia de l'autor, mort l'any 1902, a càrrec de J.Lüroth, i el tercer els compendis dels dos primers volums (no n'hi hagué mai del tercer).

SEIDENBERG, A., Did Euclid's Elements, book I, develop geometry axiomatically?, a Archive for history of exact sciences vol.14(1975), pàgs.265-287.

SZABÓ, Arpád, Anfänge der griechischen Mathematic, Budapest, 1969.

El citem per la traducció d'A.M.Ungar, The beginnings of greek mathematics, Reidel, Dordrecht, 1978. 358pp. Inclou en un annex How the pythagoreans discovered proposition II.5 of the «Elements» (1968).

TARSKI, Alfred, The concept of truth in formalized languages (1931), a Logics, semantics, metamathematics. Papers from 1923 to 1938, pàgs.143-278, traducció de J.H.Woodger, Clarendon Press, Oxford, 1956. XIV+471pp.

VAN DER WAERDEN, B.L., Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik, trad.de Helga Habicht, Birkhäuser, Basel, 1956 (1966, 2ª). 487pp.

WHITEHEAD,Alfred North, i RUSSELL,Bertrand, Principia Mathematica, 1910 (1ª), 1927 (2ª), 3 volums (en citem la reimpressió de 1968), Cambridge University Press. Vol.I, XLVI+674pp; vol.II, XXXI+742pp, vol.III, VIII+491pp.

WITTGENSTEIN, Ludwig, Logisch-philosophische Abhandlung (1921); trad. i edició catalana, amb el nom de Tractatus logico-philosophicus, a cura de Josep Maria Terricabras, Laia, Barcelona, 1981. 161pp.

Philosophische Untersuchungen (1953); citem l'obra per Investigacions filosòfiques, trad. i edició a cura de Josep Maria Terricabras, Laia, Barcelona, 1983. 395pp.